XXXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Temesvár, 2026. április 22–26.

XII. osztály

1. feladat. Oldd meg a $(3x-2)^6+(-8x^2+12x-4)^3=x^6$ egyenletet a valós számok halmazán!

2. feladat. Egy $ABCD$ konvex négyszögben $AD=BD$, $AB=BC$, $\widehat{ADB}=90°$ és $\widehat{BAC}=15°$. Igazold, hogy $AB \parallel DC$.

3. feladat. Egy egységnyi kockákból álló $10\times 10\times 10$-es térbeli táblázat két egységkockáját *barátságosnak* nevezzük, ha van legalább egy közös csúcsuk. A táblázat mindegyik egységkockájába beírtunk egy 20-nál nem nagyobb pozitív egész számot úgy, hogy bármely két barátságos egységkockába írt számok legnagyobb közös osztója 1 (azaz relatív prímek). Bizonyítsd be, hogy létezik olyan szám, amely legalább 108-szor szerepel a táblázatban!

4. feladat. Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalait a beírt kör az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. Legyen K a beírt körnek a C_1 ponttal átmérősen ellentett pontja, és D a C_1B_1 és A_1K egyenesek metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy $CD=CB_1$.

5. feladat. Az $a,b,c,d\in[-2,+\infty)$ valós számok teljesítik az

$$a+b+c+d=16$$

összefüggést.

a) Határozd meg azt a legnagyobb valós k számot, amelyre minden ilyen a,b,c,d esetén teljesül az

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq k\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2)-128$$

egyenlőtlenség!

b) Határozd meg az

$$a^3+b^3+c^3+d^3$$

kifejezés legkisebb lehetséges értékét!

6. feladat. Határozd meg az összes olyan $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $x,y\in\mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$f(x^2)+f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)+y\cdot f(x)+x\cdot f(x+y)$$

összefüggés!

Megjegyzések: Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, amelyből 1 pont hivatalból jár. A feladatok lényeges általánosítására maximálisan további 5 pont szerezhető. Munkaidő: 4 óra.