

XXXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Temesvár, 2026. április 22–26.

XII. osztály

1. feladat (10 pont). Oldd meg a $(3x - 2)^6 + (-8x^2 + 12x - 4)^3 = x^6$ egyenletet a valós számok halmazán!

Bíró Bálint, Eger

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az egyenletben szereplő $(3x - 2)^6$ kifejezést átalakítjuk a következőképpen:

$$(3x - 2)^6 = [(3x - 2)^2]^3.$$

Mivel $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$, ezért az eredeti egyenlet a következő formába is átírható:

$$(9x^2 - 12x + 4)^3 + (-8x^2 + 12x - 4)^3 = x^6. \quad (2 \text{ pont})$$

Az $a = 9x^2 - 12x + 4$ és $b = -8x^2 + 12x - 4$ helyettesítéseket alkalmazva láthatjuk, hogy

$$a + b = x^2,$$

ezért $x^6 = (x^2)^3 = (a + b)^3$. A helyettesítések és a kapott összefüggések szerint az egyenlet a következővel egyenértékű:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$, ezért a fenti egyenlőségből következik, hogy

$$3a^2b + 3ab^2 = 0 \iff 3ab(a + b) = 0.$$

Innen következik, hogy $a = 0$ vagy $b = 0$ vagy $a + b = 0$.

(1 pont)

Ha $a = 0$, akkor $9x^2 - 12x + 4 = 0$, vagyis $(3x - 2)^2 = 0$, amely egyetlen valós megoldása az $x_1 = \frac{2}{3}$.

(1 pont)

Ha $b = 0$, akkor $-8x^2 + 12x - 4 = 0$, és ennek az egyenletnek a valós megoldásai az $x_2 = 1$, illetve $x_3 = \frac{1}{2}$.

(1 pont)

Végül, ha $a + b = 0$, akkor $a + b = x^2$ szerint kapjuk, hogy $x^2 = 0$, így ennek az egyenletnek az egyetlen valós megoldása $x_4 = 0$.

(1 pont)

Összegezve, a megadott egyenlet valós megoldásai az

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = 0$$

számok, mivel az átalakítások egyenértékűek voltak.

(1 pont)

2. feladat (10 pont). Egy $ABCD$ konvex négyszögben $AD = BD$, $AB = BC$, $\widehat{ADB} = 90^\circ$ és $\widehat{BAC} = 15^\circ$. Igazold, hogy $AB \parallel DC$.

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Jelöljük α -val az \widehat{ACD} mértékét, amelyet ki fogunk számolni.

Legyen E az AB egyeneshez viszonyítva D -vel ellentétes félsíkban egy olyan pont, melyre az ADE háromszög szabályos. A szerkesztés és a feltételek miatt $AE = DE = AD = DB$. (1 pont)

Így a BDE egyenlő szárú háromszögben a csúcsnál lévő szög $\widehat{EDB} = \widehat{ADB} - \widehat{ADE} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, így az EB alapon lévő szögek $\widehat{DBE} = \widehat{DEB} = 75^\circ$. (2 pont)

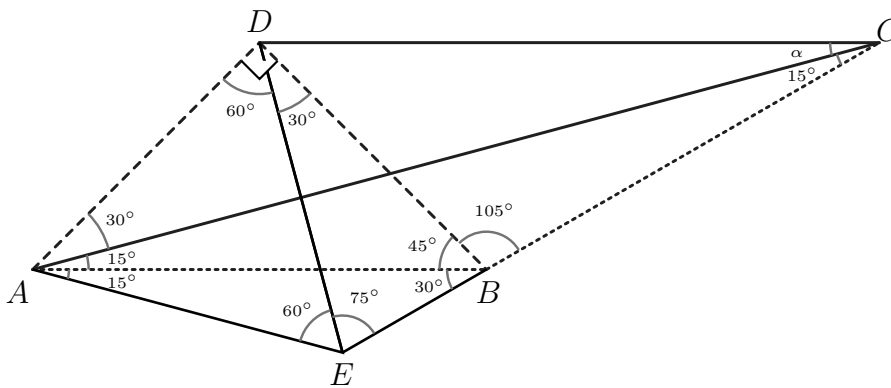
Az $AB = BC$ és $\widehat{BAC} = 15^\circ$, így az ABC egyenlő szárú háromszögben $\widehat{BCA} = 15^\circ$ és $\widehat{ABC} = 150^\circ$. Mivel az ADB egyenlő szárú derékszögű háromszögben $\widehat{ABD} = 45^\circ$, ezért $\widehat{DBC} = 150^\circ - 45^\circ = 105^\circ$. (1 pont)

Innen adódik, hogy $\widehat{EBC} = \widehat{EBD} + \widehat{DBC} = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$, tehát az E, B, C pontok kollineárisak. (2 pont)

Az EAC háromszögben $\widehat{EAC} = 180^\circ - \widehat{AED} - \widehat{DEB} - \widehat{ACE} = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, míg az DAC háromszögben $\widehat{DAC} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. (1 pont)

Végül az EAC és DAC háromszögek kongruensek, $\widehat{DCA} = \widehat{ECA}$, $AD = AE$ és az AC oldal közös, így $\alpha = \widehat{DCA} = \widehat{BCA} = 15^\circ$. (1 pont)

Mivel $\widehat{DCA} = \widehat{CAB}$, ezért $AB \parallel DC$. (1 pont)



Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az ADB egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $\widehat{DAB} = 45^\circ$, így $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} - \widehat{BAC} = 30^\circ$. Az ADC háromszögből a szinusz-tétel alapján kapjuk, hogy

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{DC}{\sin \widehat{DAC}} \iff \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{DC}{\sin 30^\circ}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az ABC háromszög is egyenlő szárú, így $\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = 15^\circ$ és $\widehat{ABC} = 150^\circ$, tehát $\widehat{DBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABD} = 150^\circ - 45^\circ = 105^\circ$. A BCD háromszögből a szinusz-tétel alapján kapjuk, hogy

$$\frac{BD}{\sin \widehat{DCB}} = \frac{DC}{\sin \widehat{DBC}} \iff \frac{BD}{\sin(\alpha + 15^\circ)} = \frac{DC}{\sin 105^\circ}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az $AD = BD$ egyenlőséget figyelembe véve a következő trigonometrikus egyenlethez jutunk:

$$\sin \alpha \cdot \sin 105^\circ = \sin 30^\circ \cdot \sin(\alpha + 15^\circ),$$

vagyis

$$2 \sin \alpha \cdot \sin 105^\circ = \sin(\alpha + 15^\circ). \quad (2 \text{ pont})$$

Egyrészt $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \cos 15^\circ$, másrészt $\sin(\alpha + 15^\circ) = \sin \alpha \cdot \cos 15^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 15^\circ$. Így a fenti egyenlet a következő alakba írható:

$$2 \sin \alpha \cdot \cos 15^\circ = \sin \alpha \cdot \cos 15^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 15^\circ, \quad (2 \text{ pont})$$

amelyet rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \cos 15^\circ - \cos \alpha \cdot \sin 15^\circ &= 0, \\ \sin(\alpha - 15^\circ) &= 0. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$, ezért $\alpha - 15^\circ = 0^\circ$, vagyis $\alpha = 15^\circ$. Tehát $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$, vagyis $AB \parallel DC$. (2 pont) ■

Harmadik megoldás. Hivatalból (1 pont)

Bevezetjük a következő jelöléseket. Legyen $AD = DB = x$ és $\widehat{ACD} = \alpha$. Be fogjuk látni, hogy $\sin \alpha = \sin 15^\circ$. Az ABC háromszög egyenlő szárú, $AB = BC$ és $\widehat{BAC} = 15^\circ$, ezért $\widehat{ABC} = 150^\circ$. Mivel $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 150^\circ \\ &= 2x^2 + 2x^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= x^2 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) \\ &= x^2 \cdot (1 + \sqrt{3})^2, \end{aligned}$$

ahonnan $AC = x(1 + \sqrt{3})$. (2 pont)

Felírjuk az ADC háromszögben a koszinusztételt:

$$\begin{aligned} DC^2 &= AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos 30^\circ \\ &= x^2 + x^2(4 + 2\sqrt{3}) - 2 \cdot x \cdot x(1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= x^2 \cdot (2 + \sqrt{3}) \\ &= x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

ahonnan $DC = \frac{x(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$. (1 pont)

Végül pedig felírjuk az ADC háromszögben is a szinusztételt:

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{DC}{\sin 30^\circ},$$

ahonnan

$$\sin \alpha = \frac{AD}{DC} \cdot \sin 30^\circ = x \cdot \frac{2}{x(\sqrt{6} + \sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad (2 \text{ pont})$$

Viszont

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{3}}{4^2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát $\sin \alpha = \sin 15^\circ$. Az ADC háromszögben \widehat{ADC} tompaszög, így \widehat{ACD} hegyesszög, ezért $\alpha = 15^\circ$. (2 pont)

Ezért $\widehat{DCA} = \widehat{CAB}$, ezért $DC \parallel AB$. (1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Egy egységnyi kockákból álló $10 \times 10 \times 10$ -es térbeli táblázat két egységkockáját *barátságosnak* nevezzük, ha van legalább egy közös csúcsuk. A táblázat mindegyik egységkockájába beírtunk egy 20-nál nem nagyobb pozitív egész számot úgy, hogy bármely két barátságos egységkockába írt számok legnagyobb közös osztója 1 (azaz relatív prímelek). Bizonyítsd be, hogy létezik olyan szám, amely legalább 108-szor szerepel a táblázatban!

Béres Zoltán, Zenta

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

A $10 \times 10 \times 10$ -es táblázatot felosztjuk $\frac{1000}{8} = 125$ darab $2 \times 2 \times 2$ -es diszjunkt altáblázatra.

Az $1, 2, \dots, 20$ számokat három csoportba soroljuk:

- az első csoportba kerülnek a páros számok: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20;
- a második csoportba kerülnek a hárommal osztható számok: 3, 6, 9, 12, 15, 18;
- míg a harmadik csoportba a megmaradt számok kerülnek: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19. (3 pont)

Egy ilyen $2 \times 2 \times 2$ -es altáblázat bármely két kockája barátságos. Az első csoportban lévő bármely két szám nem relatív prím, így egy $2 \times 2 \times 2$ -es altáblázatban legfeljebb egy szerepelhet közülük. Tehát a $10 \times 10 \times 10$ -es táblázatban legfeljebb 125 páros szám lehet.

Hasonlóan a második csoportban lévő bármely két szám sem relatív prím, így a $10 \times 10 \times 10$ -es táblázatban legfeljebb 125 szerepelhet belőlük. (3 pont)

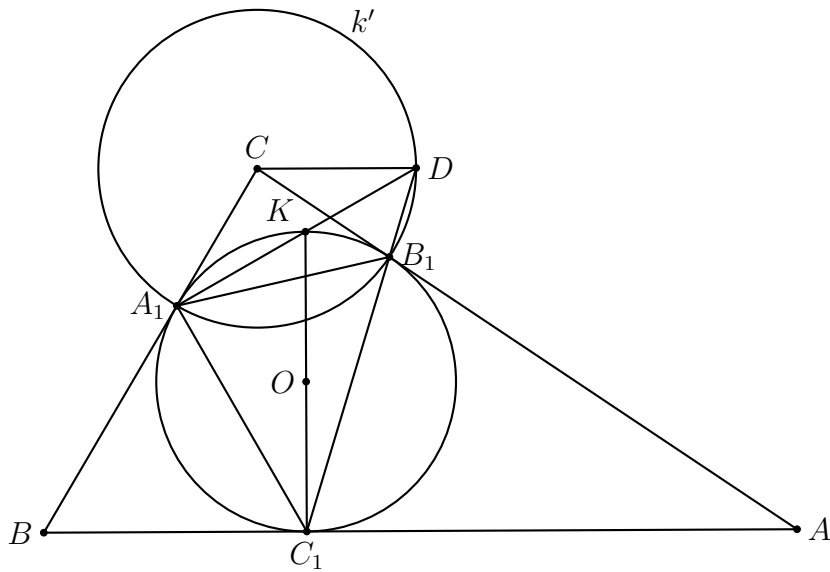
Tehát a táblázatban legalább $1000 - 125 - 125 = 750$ szerepel a harmadik csoportbeli 7 darab számból.

Mivel $750 = 7 \cdot 107 + 1$, így a skatulyaelv miatt létezik olyan az 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 számok közül, amelyből legalább 108 darab szerepel a táblázatban. (3 pont)

■

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszög BC , CA , AB oldalait a beírt kör az A_1 , B_1 , C_1 pontokban érinti. Legyen K a beírt körnek a C_1 ponttal átmérősen ellentett pontja, és D a C_1B_1 és A_1K egyenesek metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy $CD = CB_1$.

Dr. Katz Sándor, Bonyhád



Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

Legyenek az ABC háromszögben az A, B, C szögek mértékei rendre α, β, γ . A CA_1OB_1 négyszögben az A_1 és B_1 derékszögek, így $\widehat{A_1OB_1} = 180^\circ - \gamma$. A beírt körben az $\widehat{A_1C_1B_1} = \frac{1}{2}\widehat{A_1OB_1} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

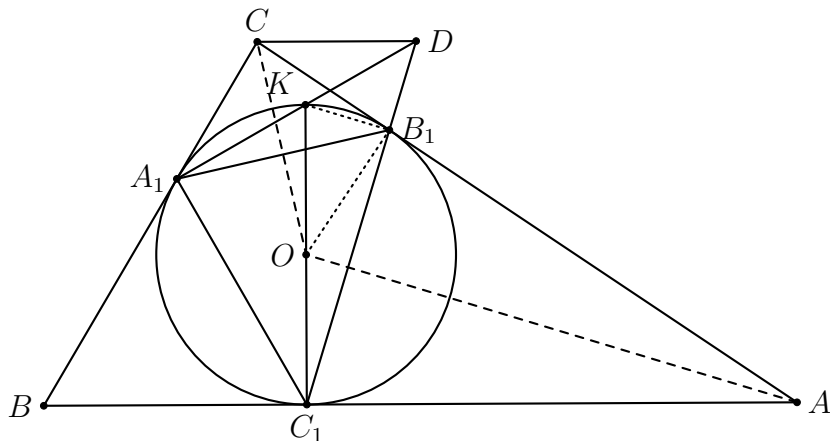
(2 pont)

A KC_1 a beírt kör átmérője, ezért Thalész tétele alapján $\widehat{DA_1C_1} = \widehat{KA_1C_1} = 90^\circ$, tehát az A_1C_1D derékszögű háromszögben

$$\widehat{C_1DA_1} = 90^\circ - \widehat{A_1C_1B_1} = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}. \quad (2 \text{ pont})$$

Rajzoljuk meg a C középpontú CA_1 sugarú k' kört. Mivel CA_1 és CB_1 a beírt körhöz a C pontból húzott érintők, ezért $CA_1 = CB_1$, tehát B_1 rajta van a k' körön. (2 pont)

A k' kör A_1B_1 húrja a C középpontból γ szög alatt látszik. Mivel $\widehat{B_1DA_1} = \widehat{C_1DA_1} = \frac{\gamma}{2}$, ezért a D pont is illeszkedik a k' körre, tehát $CD = CB_1$. (3 pont)



Második megoldás. Hivatalból (1 pont)

Ha az ABC háromszög szögei $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$, akkor az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei $\widehat{A}_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{B}_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $\widehat{C}_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Valóban, a CA_1OB_1 négyszögben az \widehat{A}_1 és \widehat{B}_1 derékszögek, így $\widehat{A_1OB_1} = 180^\circ - \gamma$. A beírt körben az $\widehat{A_1C_1B_1} = \frac{1}{2}\widehat{A_1OB_1}$, ezért $\widehat{A_1C_1B_1} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. A többi szögre is hasonlóan beláthatók az egyenlőségek. (2 pont)

A KC_1 a beírt kör átmérője, ahonnan Thalész tétele alapján következik, hogy $\widehat{KA_1C_1} = 90^\circ$, tehát $\widehat{C_1DA_1} = \frac{\gamma}{2}$ és $\widehat{KA_1B_1} = 90^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$, illetve az is következik, hogy $\widehat{KB_1C_1} = 90^\circ$, tehát $KB_1 \perp DC_1$. (2 pont)

A KC_1B_1 szög is $\frac{\alpha}{2}$ mértékű, mert a KB_1 körívhez tartozik. (1 pont)

Az AOC és C_1KD háromszögek hasonlóak, mert

$$\widehat{OAC} = \frac{\alpha}{2} = \widehat{KC_1B_1} = \widehat{KC_1D} \quad \text{és} \quad \widehat{OCA} = \frac{\gamma}{2} = \widehat{A_1DC_1} = \widehat{KDC_1}.$$

Ezért a magasság ugyanolyan arányban osztja az AC , illetve C_1D oldalakat:

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{DB_1}{B_1C_1}. \quad (2 \text{ pont})$$

Ebből következik, hogy az AC_1B_1 és B_1DC háromszögek hasonlóak. A $B_1A = C_1A$, mert az A pontból a beírt körhöz húzott érintők, tehát a B_1AC_1 háromszög egyenlő szárú. A hasonlóság miatt a B_1DC háromszög is egyenlő szárú, $CB_1 = CD$. (2 pont)

■

5. feladat (10 pont). Az $a, b, c, d \in [-2, +\infty)$ valós számok teljesítik az

$$a + b + c + d = 16$$

összefüggést.

a) Határozd meg azt a legnagyobb valós k számot, amelyre minden ilyen a, b, c, d esetén teljesül az

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq k \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 128$$

egyenlőtlenség!

b) Határozd meg az

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3$$

kifejezés legkisebb lehetséges értékét!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Ha

$$a = b = c = d = 4,$$

akkor a változókra kirótt feltételek teljesülnek, és

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 4 \cdot 4^3 = 256, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 \cdot 4^2 = 64.$$

Ezért az egyenlőtlenség fennállásához kell teljesüljön, hogy $256 \geq 64k - 128$, vagyis

$$k \leq 6. \quad (2 \text{ pont})$$

Az a sejtésünk, hogy a legnagyobb k érték egyenlő 6-tal. Ehhez elég igazolni, hogy minden olyan $a, b, c, d \geq -2$ valós számra, amelyek összege 16, teljesül az

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 128$$

egyenlőtlenség. Ez viszont ekvivalens az

$$(a^3 - 6a^2 + 32) + (b^3 - 6b^2 + 32) + (c^3 - 6c^2 + 32) + (d^3 - 6d^2 + 32) \geq 0 \quad (1 \text{ pont})$$

egyenlőtlenséggel, ami igaz, mivel minden $x \geq -2$ esetén

$$x^3 - 6x^2 + 32 = (x + 2)(x - 4)^2 \geq 0.$$

Tehát a legnagyobb k érték egyenlő 6-tal. (2 pont)

b) A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség alapján tetszőleges x, y, z, t valós számokra teljesül, hogy

$$4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \geq (x + y + z + t)^2, \quad (1 \text{ pont})$$

ezért minden olyan $a, b, c, d \geq -2$ valós számra, amelyek összege 16,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq \frac{16^2}{4} = 64. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen, az a) alpont alapján egyrészt

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 128 \geq 6 \cdot 64 - 128 = 256, \quad (1 \text{ pont})$$

másrészt pedig $a = b = c = d = 4$ esetén fennáll az egyenlőség, tehát

$$\min(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) = 256. \quad (1 \text{ pont})$$

■

6. feladat (10 pont). Határozd meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$f(x^2) + f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) + y \cdot f(x) + x \cdot f(x + y)$$

összefüggés!

dr. Ágó Krisztina, Újvidék

Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

Az $x = 0$ helyettesítéssel az $f(0)(f(y) + y - 2) = 0$ összefüggéshez jutunk, ahonnan következik, hogy ha $f(0) \neq 0$, akkor

$$f(x) = 2 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a függvény valóban megoldás.

Ha $f(0) = 0$, akkor az $y = 0$ helyettesítésből következik, hogy $f(x^2) = xf(x)$. Másrészt, az $y = -x$ helyettesítésből következik, hogy

$$f(x^2) + f(-x^2) = f(x)f(-x) - xf(x),$$

és felhasználva, hogy az előbbi összefüggés alapján $f(x^2) = f((-x)^2) = -xf(-x)$ is teljesül, kapjuk, hogy minden $x \neq 0$ esetén

$$f(-x) = -f(x).$$

Mivel $f(0) = 0$, ez az összefüggés minden x esetén fennáll, vagyis f páratlan függvény. Alkalmazva ezt az észrevételt az $y = -x$ helyettesítésre, következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x)(f(x) + x) = 0,$$

tehát minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) = 0$ vagy $f(x) = -x$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad f(x) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvények is megoldások.

(5 pont)

Hátravan még a „vegyes” eset vizsgálata, amiről belátjuk, hogy ellentmondáshoz vezet.

Tegyük fel, hogy létezik $u, v \neq 0$ úgy, hogy $f(u) = 0$ és $f(v) = -v$. Ekkor, ha $x = u$, $y = v$, az eredeti, és az $f(u^2) = uf(u) = 0$ összefüggésekből kapjuk, hogy

$$f(uv) = uf(u + v).$$

Két eset lehetséges. Ha $f(uv) = -uv$, akkor a fenti egyenlőség bal oldala nem nulla (hiszen $u, v \neq 0$), így a jobb oldalon álló $f(u + v)$ sem nulla, ezért $f(u + v) = -u - v$ kell legyen. Így kapjuk, hogy $-uv = u(-u - v)$, tehát $u^2 = 0$, ami ellentmondás. Ezért marad az az eset, amikor

$$f(uv) = f(u + v) = 0.$$

Ekkor az eredeti összefüggésből az $x = v$, $y = u$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$-v^2 + f(uv) = -uv + vf(u + v),$$

vagyis $-v^2 = -uv$, tehát $u = v$, ami ellentmondás.

(4 pont)

Összesítve, beláttuk, hogy a függvényegyenletnek pontosan három megoldása van, amelyek a következők:

$$f(x) = 2 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad \text{vagy} \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad \text{vagy} \quad f(x) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Megjegyzés. A hivatalból járó 1 pont felett a három megoldás megtalálásáért és leellenőrzéséért 5 pont jár maximálisan, míg annak belátásáért, hogy ezeken kívül nincs más megoldás további 4 pont jár.

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az első megoldást követve eljutunk addig, hogy ha $f(0) = 0$, akkor $f(x^2) = xf(x)$ és $f(-x) = -f(x)$, valamint $f(x) \in \{0, -x\}$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát az

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad f(x) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvények megoldások.

(5 pont)

Az eredeti összefüggésben az y helyett $-y$ -t téve és felhasználva, hogy $f(x^2) = xf(x)$, valamint f páratlan, kapjuk, hogy

$$xf(x) - f(xy) = -f(x)f(y) - yf(x) + xf(x - y).$$

Ha most ezt az összefüggést hozzáadjuk az eredetihez, következik, hogy

$$2xf(x) = x(f(x + y) + f(x - y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

ahonnan

$$2f(x) = f(x + y) + f(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Vegyük észre, hogy ez az összefüggés az $f(0) = 0$ és f páratlansága miatt az $x = 0$ esetben is teljesül. Innen viszont előbb az $y = x$ helyettesítéssel következik, hogy $f(2x) = 2f(x)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, majd pedig az $u = x + y$, $v = x - y$ változócserevel azt kapjuk, hogy

$$2f\left(\frac{u+v}{2}\right) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Alkalmazva az $f(2x) = 2f(x)$ összefüggést, megkaptuk, hogy az f függvény additív:

$$f(u + v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Innen viszont következik, hogy nem létezik olyan $u, v \neq 0$, amelyre $f(u) = 0$ és $f(v) = -v$. Valóban, a $0 = f(u + v) = f(u) + f(v) = 0 - v$ ellentmond annak, hogy $v \neq 0$, illetve a $-u - v = f(u + v) = f(u) + f(v) = 0 - v$ pedig annak, hogy $u \neq 0$. (4 pont)

■

Harmadik megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az első megoldást követve eljutunk addig, hogy ha $f(0) = 0$, akkor $f(x^2) = xf(x)$ és $f(-x) = -f(x)$, valamint $f(x) \in \{0, -x\}$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát az

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad f(x) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvények megoldások.

(5 pont)

Ahhoz, hogy belássuk, hogy a „vegyes” eset nem állhat fent, elég igazolni, hogy a megoldások folytonosak abban az esetben, ha $f(0) = 0$. Ehhez igazoljuk előbb, hogy f folytonos a 0-ban. Valóban, mivel $f(x) = -x$ vagy $f(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért

$$|f(x)| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ahonnan a majorálási kritérium alapján következik, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy f mindenhol folytonos, rögzítsünk egy $x \neq 0$ valós számot. Felhasználva, hogy $f(x^2) = xf(x)$, az eredeti összefüggésből következik, hogy

$$f(x + y) = \frac{xf(x) + f(xy) - f(x)f(y) - yf(x)}{x}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

A jobb oldali kifejezés határértéke, ha $y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xf(x) + f(xy) - f(x)f(y) - yf(x)}{x} = \frac{xf(x) + 0 - 0 - 0}{x} = f(x).$$

(Felhasználtuk, hogy f folytonos a 0-ban, ezért $\lim_{y \rightarrow 0} f(xy) = f(0) = 0$.) Ezért minden $x \neq 0$ esetén

$\lim_{y \rightarrow 0} f(x + y) = f(x)$, vagyis f folytonos függvény a 0-n kívüli pontokban is. (4 pont)

■

Megjegyzés. A szakirodalomban az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{f(u) + f(v)}{2}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

függvényegyenletet *Jensen-függvényegyenletként* ismerjük. A második megoldásban vázolt gondolatmenet alapján ez az egyenlet ekvivalens az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$2f(x) = f(x + y) + f(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

függvényegyenlettel és belátható, hogy a folytonos megoldásai pontosan a legfennebb elsőfokú polinomfüggvények (ugyanakkor létezik végtelen sok, nemfolytonos megoldás). A feladat második megoldása során eljutottunk a Jensen-függvényegyenletig, és a rendelkezésünkre álló extra információkból sikerült leszűkítenünk a megoldásokat a megkapott három esetre.