MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

XXXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Temesvár, 2026. április 22–26.

XI. osztály

1. feladat. Oldd meg az egész számok halmazán a $16a^2 + b = b^2 + 8$ egyenletet!

2. feladat. Az ABC háromszögben $\widehat{BAC} = 75°$, $\widehat{ABC} = 80°$. Legyen D a BC oldal belső pontja úgy, hogy $CD = AB$, az E pont pedig úgy illeszkedik az AC oldalra, hogy $BE = AB$. Az E pontból a BC oldalra bocsátott merőleges a BC oldalt az F pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy az F pont a BD szakasz felezőpontja!

3. feladat. Az ABC háromszögben F az AB szakasz felezőpontja, D az AC oldal belső pontja úgy, hogy BD az $\widehat{ABC}$ belső szögfelezője, $FC \cap BD = \{P\}$, $AP \cap BC = \{E\}$, illetve $CE = k \cdot DE$, ahol $k > 0$ valós szám.

a) Számítsd ki a $\dfrac{T_{FDE}}{T_{ABC}}$ arány értékét k függvényében!

b) Határozd meg azt a k értéket, amelyre a $T_{FDE} - T_{DEC}$ különbség maximális!

4. feladat. Határozd meg a k egész paraméter értékét úgy, hogy a $\dfrac{1}{k} \cdot |x| - 1 = \{x\}$ egyenletnek

a) pontosan 2025 darab megoldása legyen;

b) pontosan 2026 darab megoldása legyen!

($\{x\}$ az x törtrészét, míg a $|x|$ az abszolútértékét jelöli)

5. feladat. Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat tagjaira teljesül, hogy

$$a_1 = a_2 = 3 \quad \text{és} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - (n+1)a_n + n + 1}, \quad \text{bármely } n \geq 2 \text{ esetén.}$$

Igazold, hogy bármely n pozitív egész szám esetén teljesül az

$$a_1 + 2! \cdot a_2 + 3! \cdot a_3 + \ldots + n! \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

egyenlőség! ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

6. feladat. Egy $n = 2k + 1$ ($k \geq 1$ egész) fős pingpongbajnokságon minden játékos pontosan egyszer játszik minden másik játékossal, és minden mérkőzésnek van győztese (döntetlen nincs). Egy három játékosból álló $\{A, B, C\}$ hármast ciklusnak nevezünk, ha az eredményeik körkörösek, azaz A legyőzte B-t, B legyőzte C-t, és C legyőzte A-t, vagy ennek fordított irányú változata. Jelölje T a ciklusok számát.

a) Bizonyítsd be, hogy $T \leq \dfrac{n^3 - n}{24}$;

b) Bizonyítsd be, hogy ha $T = \dfrac{n^3 - n}{24}$, akkor bármely két különböző játékosnak ugyanannyi olyan ellenfele van, akiket mindketten legyőztek, mint ahány olyan ellenfél, aki mindkettőjüket legyőzte!

Megjegyzések: Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, amelyből 1 pont hivatalból jár. A feladatok lényeges általánosítására maximálisan további 5 pont szerezhető. Munkaidő: 4 óra.