XXXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Temesvár, 2026. április 22–26.

XI. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Oldd meg az egész számok halmazán a $16a^2 + b = b^2 + 8$ egyenletet!

Fedorszki Ádám, Beregszász

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Szorozzuk 4-gyel az egyenletet, majd átrendezés után adódik az

$$(8a)^2 - 4b^2 + 4b - 1 = 31 \iff (8a)^2 - (2b-1)^2 = 31 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

alak. Ezt tényezőre bontva kapjuk, hogy

$$(8a - 2b + 1)(8a + 2b - 1) = 31. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel mindkét tényező egész, a következő négy esetet kapjuk:

$$\begin{cases} 8a - 2b + 1 = 31 \\ 8a + 2b - 1 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 8a - 2b + 1 = -31 \\ 8a + 2b - 1 = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 8a - 2b + 1 = 1 \\ 8a + 2b - 1 = 31 \end{cases}, \quad \begin{cases} 8a - 2b + 1 = -1 \\ 8a + 2b - 1 = -31 \end{cases}.$$

(4 pont)

Az egyenletrendszerek megoldásai: $(2, -7)$, $(-2, 8)$, $(2, 8)$, $(-2, -7)$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy

$$16a^2 - b^2 = 8 - b. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tényezőkre bontva az egyenlet bal oldalát,

$$(4a - b)(4a + b) = 8 - b. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ha $8 - b = 0$, akkor a $b = 8, a = \pm 2$ megoldásokat kapjuk. **(1 pont)**

Ha $8 - b > 0$ akkor $b < 8$. Az egyenletből adódik, hogy $(4a - b) \mid (8 - b)$, tehát $4a - b \leq 8 - b$. Egyszerűbb alakra hozva, $a \leq 2$. **(2 pont)**

Mivel a és $-a$ egyidejűleg megoldás, ezért $-2 \leq a \leq 2$. Az a különböző értékeit letárgyalva, kapjuk még a $b = 7$, $a = \pm 2$ megoldásokat. **(1 pont)**

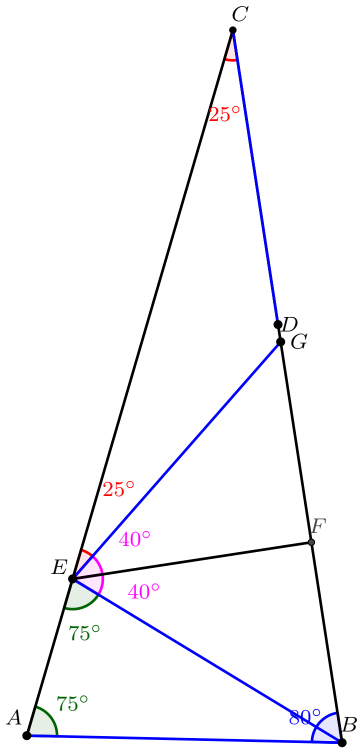
Amennyiben $8 - b < 0$, vagyis $b > 8$, az egyenletből kapjuk, hogy $(4a + b) \mid (8 - b)$, tehát $b - 8 \leq 4a + b$, amiből következik, hogy $a \geq -2$, ahonnan $-2 \leq a \leq 2$, amely eseteket letárgyaltuk. **(2 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszögben $\widehat{BAC} = 75°$, $\widehat{ABC} = 80°$. Legyen D a BC oldal belső pontja úgy, hogy $CD = AB$, az E pont pedig úgy illeszkedik az AC oldalra, hogy $BE = AB$. Az E pontból a BC oldalra bocsátott merőleges a BC oldalt az F pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy az F pont a BD szakasz felezőpontja!

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Legyen a B pont EF egyenesre vonatkozó tükörképe G. (**1 pont**)
Belátjuk, hogy D és G pontok egybeesek, ezzel belátjuk az állítást.
Az EF és BC egyenesek merőlegesek, ezért G illeszkedik a BC oldalra. A BE szakasz tükörképe a GE szakasz, ezért $GE = BE = AB$. (**2 pont**)
ABE háromszög egyenlő szárú, mert $BE = AB$, tehát $\widehat{BEA} = \widehat{BAE} = 75°$ és $\widehat{ABE} = 30°$ ezért $\widehat{EBC} = 80° - 30° = 50°$. (**2 pont**)
A BGE háromszög egyenlő szárú, mert $GE = BE$, tehát $\widehat{BGE} = \widehat{EBG} = 50°$. Tehát CEG háromszög G csúcsnál lévő külső szöge $\widehat{BGE} = 50°$, C csúcsnál lévő belső szöge $\widehat{ECG} = 25°$, ezért E csúcsnál lévő belső szöge $\widehat{CEG} = 50° - 25° = 25°$. (**2 pont**)
Tehát a CEG háromszög egyenlőszárú, azaz $CG = GE$. Mivel $CG = GE = BE = AB$, tehát $CG = AB$, és a feladat feltételei szerint $CD = AB$, ezért a G és a D pontok egybeesnek. (**2 pont**)
■

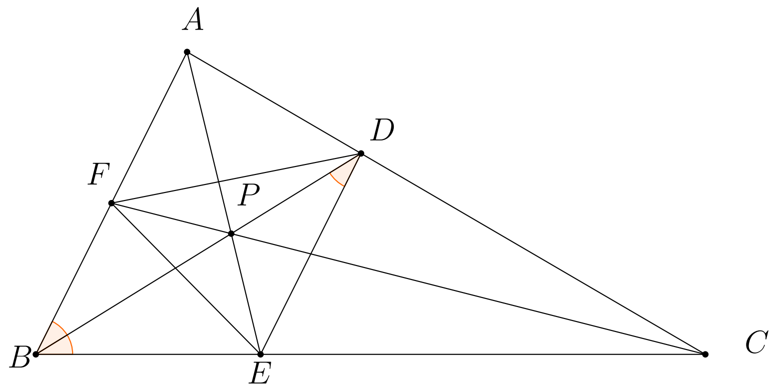
3. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszögben F az AB szakasz felezőpontja, D az AC oldal belső pontja úgy, hogy BD az $\widehat{ABC}$ belső szögfelezője, $FC \cap BD = \{P\}$, $AP \cap BC = \{E\}$, illetve $CE = k \cdot DE$, ahol $k > 0$ valós szám.

a) Számítsd ki a $\dfrac{T_{FDE}}{T_{ABC}}$ arány értékét k függvényében!

b) Határozd meg azt a k értéket, amelyre a $T_{FDE} - T_{DEC}$ különbség maximális!

Tóth Viktória, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



a) A feladat feltételeiből adódik, hogy az AE, BD és CF egyenesek metszik egymást a P pontban. Az AE, BD, CF egyenesekre alkalmazva a Ceva-tételt kapjuk, hogy

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1.$$

Másrészt, F az AB felezőpontja, tehát $\frac{AF}{FB} = 1$. Így $\frac{BE}{EC} = \frac{DA}{CD}$, vagyis Thalész fordított tétele miatt $DE \parallel AB$. (**2 pont**)

Ez alapján $\widehat{EDB} = \widehat{DBA}$. Ugyanakkor BD az $\widehat{ABC}$ szög szögfelezője, tehát $\widehat{DBE} = \widehat{DBA}$, ahonnan $BE = DE$ és így $BC = (k+1) \cdot DE$, vagyis

$$\frac{EC}{BC} = \frac{k}{k+1}. \qquad (\textbf{1 pont})$$

A párhuzamosság miatt a DEC és ABC háromszögek hasonlóak, tehát a területek aránya a hasonlósági arány négyzete, azaz

$$\frac{T_{DEC}}{T_{ABC}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2. \qquad (\textbf{1 pont})$$

Ugyanakkor a $DE \parallel AB$ miatt az FDE és BDE háromszögek magasságainak hossza megegyezik. Mivel az alapjuk közös, kapjuk, hogy $T_{FDE} = T_{BDE}$. Továbbá

$$\frac{T_{BDE}}{T_{DEC}} = \frac{BE}{EC} = \frac{1}{k},$$

mert a BDE és DEC háromszögek D-ből húzott magassága megegyezik. Tehát

$$\frac{T_{FDE}}{T_{ABC}} = \frac{T_{FDE}}{T_{DEC}} \cdot \frac{T_{DEC}}{T_{ABC}} = \frac{k}{(k+1)^2}. \qquad (\textbf{1 pont})$$

(A $\frac{T_{FDE}}{T_{ABC}}$ arányt meghatározhatjuk úgy is, hogy ha kiszámoljuk a T_{AFD}, T_{BEF} és T_{DEC} értékeket a T_{ABC} függvényében.)

b) Az előbbi számolások alapján

$$\frac{T_{FDE} - T_{DEC}}{T_{ABC}} = \frac{k - k^2}{(k+1)^2},$$

tehát elégséges ennek a kifejezésnek a maximumát meghatározni. (**1 pont**)

Vezessük be a $a := \frac{1}{k+1}$ jelölést! Ekkor

$$\frac{k-k^2}{(k+1)^2} = \frac{(k+1) - 1 - (k+1)^2 + 2k + 1}{(k+1)^2} = -1 + \frac{3}{k+1} - \frac{2}{(k+1)^2} = -2a^2 + 3a - 1, \qquad (\textbf{2 pont})$$

ami eléri a maximumát $a = -\frac{3}{-2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$-ben. Vagyis $k = \frac{1}{3}$. (**1 pont**)

■

Megjegyzés. A $\frac{k-k^2}{(k+1)^2}$ maximuma a deriváltak segítségével is meghatározható.

4. feladat (10 pont)**.** Határozd meg a k egész paraméter értékét úgy, hogy a $\dfrac{1}{k} \cdot |x| - 1 = \{x\}$ egyenletnek

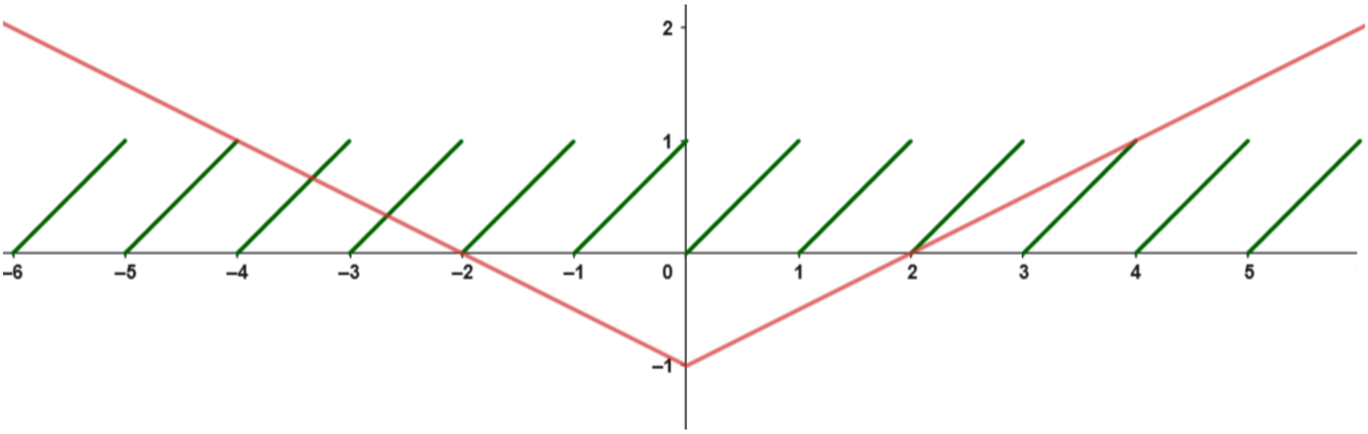
a) pontosan 2025 darab megoldása legyen;

b) pontosan 2026 darab megoldása legyen!

($\{x\}$ az x törtrészét, míg a $|x|$ az abszolútértékét jelöli)

Zavargó Zsuzsanna, Zenta

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



Vegyük észre, hogy ha $k < 0$, akkor az egyenlet bal oldala negatív, míg a jobb oldala nem lehet negatív, ezért az egyenletnek nincs megoldása. Ha $k = 1$, akkor a $|x| = \{x\} + 1$ egyenletnek bármely $x \in [1, 2)$ valós szám megoldása. A $k \geq 2$ esetén az egyenlet megoldásait az $f(x) = \frac{1}{k}|x| - 1$, és $g(x) = \{x\}$ függvények metszéspontjai adják meg. (**1 pont**)
Ezt a két függvényt grafikusan ábrázoljuk. A pozitív tartományon a $(k, 0)$ az első metszéspont, míg az utolsó metszéspont a $(2k, 1)$ pont lenne, de ez a pont nincs rajta a g függvény grafikus képén. Így a $[k, k+1), [k+1, k+2), \ldots, [2k-1, 2k)$ intervallumok mindegyikén van egy-egy metszéspont, kivéve az utolsó intervallumot. Összesen tehát $k-1$ metszéspont van. (**3 pont**)
A negatív tartományon a $(-2k, 1)$ és $(-k, 0)$ pontok a szélső metszéspontok. Tehát a

$$[-2k-1, -2k), \quad [-2k, -2k+1), \quad \ldots, \quad [-k, -k+1)$$

intervallumok mindegyikén ugyancsak egy-egy metszéspont található, kivéve az első intervallumot. Ez esetben $k+1$ metszéspont van. Tehát összesen $2k$ megoldása van az egyenletnek. (**3 pont**)
a) Az egyenletnek páros számú megoldása van, ezért nem lehet 2025 darab megoldás. (**1 pont**)
b) $k = 1013$ esetén lesz 2026 darab megoldás. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Ha $k < 0$, akkor $\frac{1}{k}|x| - 1 < 0$, de $\{x\} \geq 0$, így kapjuk, hogy $k > 0$. Mivel $\{x\} \in [0, 1)$, ezért $x \in [k, 2k)$. Ha $k = 1$, akkor a $|x| = \{x\} + 1$ egyenletnek bármely $x \in [1, 2)$ valós szám megoldása. A $k \geq 2$ értékeire két esetet vizsgálunk. Ha $x > 0$, felhasználva a $\{x\} = x - [x]$ összefüggést kapjuk, hogy

$$[x] = \frac{(k-1)x}{k} + 1.$$

Tehát $\frac{(k-1)x}{k}$ egész szám. Legyen $a = \frac{(k-1)x}{k} \in \mathbb{Z}$. Innen kapjuk, hogy $x = \frac{ka}{k-1}$, ahol $x \in [k, 2k)$. A $k \leq \frac{ka}{k-1} < 2k$ egyenlőtlenségből következik, hogy $k-1 \leq a < 2k-2$. Ezért a pozitív számok halmazán $k-1$ megoldás van. (**4 pont**)
Ha $x < 0$, akkor hasonló gondolatmenet alapján következik, hogy az egyenletnek $k+1$ megoldása van. Tehát összesen az egyenletnek $2k$ megoldása van bármely $k \geq 2$ egész szám esetén. (**3 pont**)
a) Az egyenletnek páros számú megoldása van, ezért nem lehet 2025 darab megoldás. (**1 pont**)
b) $k = 1013$ esetén lesz 2026 darab megoldás. (**1 pont**)
■

5. feladat (10 pont)**.** Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat tagjaira teljesül, hogy

$$a_1 = a_2 = 3 \quad \text{és} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - (n+1)a_n + n + 1}, \quad \text{bármely } n \geq 2 \text{ esetén.}$$

Igazold, hogy bármely n pozitív egész szám esetén teljesül az

$$a_1 + 2! \cdot a_2 + 3! \cdot a_3 + \ldots + n! \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

egyenlőség! $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Vegyük észre, hogy a sorozat egyik tagja sem 0. Indukcióval igazoljuk a kért állítást. Egyértelmű, hogy $k = 1$ esetén az egyenlőség igaz, továbbá ha $k = 2$, akkor

$$a_1 + 2! \cdot a_2 = 3 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = a_1 \cdot a_2,$$

vagyis fennáll az egyenlőség. Feltételezzük, hogy $k = n$-re igaz az állítás, vagyis

$$a_1 + 2! \cdot a_2 + 3! \cdot a_3 + \ldots + n! \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Be szeretnénk látni, hogy

$$a_1 + 2! \cdot a_2 + 3! \cdot a_3 + \ldots + (n+1)! \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}.$$

Ehhez elég megmutatni, hogy fennáll az

$$(n+1)! \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot (a_{n+1} - 1), \tag{1}$$

egyenlőség. (**3 pont**)
Ezért vizsgáljuk a $\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}-1}$ törtet. A megadott rekurzív képlet származtatásával kapjuk a

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n^2}{(n+1) \cdot (a_n - 1)}$$

egyenlőséget. (**2 pont**)
Írhatjuk, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n}{n+1} \cdot \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{a_n}{n+1} \cdot \frac{a_{n-1}}{n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} - 1} = \ldots = \frac{a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_3}{(n+1) \cdot n \cdot \ldots \cdot 4} \cdot \frac{a_2}{3} \cdot \frac{a_2}{a_2 - 1},$$

(**3 pont**)

ami az $a_2 = 3 = a_1$ miatt adja az

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_1}{(n+1)!}, \tag{2}$$

alakot, amiből kapjuk az (1) egyenlőséget. Tehát a matematikai indukció elve alapján igazoltuk az állítást. (**1 pont**)
■

Megjegyzés. A (2)-es összefüggésig el lehet jutni a matematikai indukció elvének használata nélkül is. Ezután ha észrevesszük, hogy $(n+1)! \cdot a_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n} a_k$, akkor a keresett egyenlőség teleszkopikus összegek kialakításával is igazolható.

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az igazolni kívánt állítás egyenértékű az

$$\frac{a_1 + 2! \cdot a_2 + 3! \cdot a_3 + \ldots + n! \cdot a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} = 1$$

összefüggéssel, amit szintén matematikai indukcióval bizonyítunk. Az $n = 1$ eset triviális, ellenőrizve $n = 2$-re látható, hogy

$$\frac{a_1 + 2! \cdot a_2}{a_1 \cdot a_2} = 1.$$

Továbbá az $n = 3$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + 2! \cdot a_2 + 3! \cdot a_3}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} &= \frac{(a_1 + 2! \cdot a_2) + 3! \cdot a_3}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} = \frac{a_1 \cdot a_2 + 6 \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2 - 3a_2 + 3}}{a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2 - 3a_2 + 3}} \\
&= \frac{a_1 \cdot a_2^3 - 3a_1 \cdot a_2^2 + 3a_1 \cdot a_2 + 6a_2^2}{a_1 \cdot a_2^3} \\
&= \frac{a_1 \cdot a_2^3 - 3a_1 \cdot a_2^2 + 3a_2 \cdot (a_1 + 2a_2)}{a_1 \cdot a_2^3} \\
&= \frac{a_1 \cdot a_2^3 - 3a_1 \cdot a_2^2 + 3a_2 \cdot a_1 \cdot a_2}{a_1 \cdot a_2^3} \\
&= \frac{a_1 \cdot a_2^3}{a_1 \cdot a_2^3} = 1.
\end{aligned}$$

Feltételezzük, hogy az összefüggés minden $k \le n - 1$ esetén igaz és belátható, hogy $k = n$-re is igaz. **(3 pont)**

Valóban, az indukciós feltevés többszöri alkalmazásával az

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + 2! \cdot a_2 + 3! \cdot a_3 + \ldots + n! \cdot a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} &= \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + n! \cdot a_n}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n} \\
&= \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + n! \cdot \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 - n \cdot a_{n-1} + n}}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 - n \cdot a_{n-1} + n}} \\
&= \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^3 - na_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^2 + na_{n-1}(a_1 \cdot \ldots a_{n-2} + (n-1)! \cdot a_{n-1})}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^3} \\
&= \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^3 - na_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^2 + n \cdot a_{n-1} \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^3} \\
&= \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^3}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^3} = 1,
\end{aligned}$$

igazolandó állításhoz jutunk. A matematikai indukció elve alapján igazoltuk az állítást. **(6 pont)**

■

6. feladat (10 pont)**.** Egy $n = 2k+1$ ($k \geq 1$ egész) fős pingpongbajnokságon minden játékos pontosan egyszer játszik minden másik játékossal, és minden mérkőzésnek van győztese (döntetlen nincs). Egy három játékosból álló $\{A, B, C\}$ hármast ciklusnak nevezünk, ha az eredményeik körkörösek, azaz A legyőzte B-t, B legyőzte C-t, és C legyőzte A-t, vagy ennek fordított irányú változata. Jelölje T a ciklusok számát.

a) Bizonyítsd be, hogy $T \leq \dfrac{n^3 - n}{24}$;

b) Bizonyítsd be, hogy ha $T = \dfrac{n^3 - n}{24}$, akkor bármely két különböző játékosnak ugyanannyi olyan ellenfele van, akiket mindketten legyőztek, mint ahány olyan ellenfél, aki mindkettőjüket legyőzte!

Loga Patrik, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Jelölje a bajnokság összes résztvevőjének számát n (ahol $n \geq 3$). A játékosokat jelölje $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Legyen a J_i játékos győzelmeinek száma d_i. Mivel a bajnokságban mindenki pontosan egyszer játszik mindenkivel és nincs döntetlen, a lejátszott mérkőzések száma megegyezik a győzelmek összegével, ami

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$ **(1 pont)**

n darab játékos összesen $\binom{n}{3}$ darab hármast alkot. Egy játékoshármas kétféle lehet: vagy ciklus, vagy „tranzitív", azaz egyik játékos megverte a másik kettőt a hármason belül. **(1 pont)**
Ezek alapján azon tranzitív hármasok száma, amelyekben győztesként van benne egy J_i játékos, $\binom{d_i}{2}$-vel egyenlő. Így minden $i \in \{1, 2, ..., n\}$ esetén az előbb megszámolt tranzitív játékoshármasok különbözőek és az összeset megszámláltuk, tehát a tranzitív hármasok száma

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}.$$ **(1 pont)**

A ciklusok T számát megkapjuk, ha az összes hármas számából kivonjuk a tranzitív hármasok számát:

$$T = \binom{n}{3} - \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}.$$

T akkor maximális, ha $\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$ minimális, ezért az alsó korlát meghatározásához alakítsuk át az összeget:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(d_i-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i.$$

A számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség (vagy a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség) alapján írható, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}\right)^2 \implies \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n(n-1)^2}{4}.$$ **(1 pont)**

Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{n(n-1)^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = \frac{n(n-1)(n-3)}{8}.$$

A kapott alsó korlátot beírjuk a ciklusok egyenletébe a felső korlát eléréséhez, tehát

$$T \leq \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-3)}{8},$$

amit közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$T \leq \frac{4n(n-1)(n-2) - 3n(n-1)(n-3)}{24} = \frac{n(n-1)[4n-8-3n+9]}{24} = \frac{n^3-n}{24}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) Tegyük fel, hogy $T = \frac{n^3-n}{24}$. Ez pontosan akkor áll fenn, ha az alkalmazott közepek közötti egyenlőtlenségben egyenlőség van. Ezért az összes d_i meg kell egyezzen, vagyis minden i-re

$$d_i = \frac{n-1}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát minden játékos pontosan $\frac{n-1}{2}$ mérkőzést nyert meg, és pontosan $\frac{n-1}{2}$ mérkőzést veszített el, mivel $n-1$ ellenfele volt. Válasszunk ki két tetszőleges, különböző játékost, A-t és B-t. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy A legyőzte B-t. A többi $n-2$ ellenfelet csoportosítsuk aszerint, hogy milyen eredményt értek el A és B ellen. Legyen

- x: azok száma, akiket A és B is legyőzött;
- y: azok száma, akik A-t és B-t is legyőzték;
- w: azok száma, akik legyőzték A-t, de kikaptak B-től.

B összesen $\frac{n-1}{2}$ mérkőzést nyert meg. Mivel A-tól kikapott, a győzelmeit kizárólag a többi játékos ellen érte el. B pontosan azokat győzte le, akiket A is (számuk x), és azokat, akik A-t legyőzték (számuk w). Így felírható, hogy

$$x + w = \frac{n-1}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan, A összesen $\frac{n-1}{2}$ mérkőzést veszített el. Mivel ő legyőzte B-t, a vereségeit kizárólag a többi játékos ellen szenvedte el. A pontosan azoktól kapott ki, akiktől B is (számuk y), és azoktól, akiket B bár legyőzött, de A-t megverték (számuk w). Ebből adódik, hogy

$$y + w = \frac{n-1}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A két egyenletből egyértelműen következik, hogy

$$x + w = y + w,$$

ahonnan $x = y$. Tehát a mindkét játékos által legyőzött ellenfelek száma valóban megegyezik a mindkét játékost legyőző ellenfelek számával. **(1 pont)**

■