XXXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Temesvár, 2026. április 22–26.

X. osztály

1. feladat. András és Béla az asztalon előttük lévő 101 darab papírlappal játszanak, melyekre rendre a következő számokat írták: $3^1, 3^2, \ldots, 3^{100}, 3^{101}$. (Mindegyik lapra egy számot írtak, és minden számot egyszer használtak fel.) Egy lépésben a soron következő játékos kiválaszthatja bármelyik papírlapot, és azt vagy a saját kosarába, vagy az ellenfele kosarába teszi. András kezdi a játékot, és felváltva lépnek. A játék akkor ér véget, amikor mindegyik papírlap belekerült valamelyikük kosarába. Ezt követően mindketten kiszámolják a kosarukba került számok összegének 5-tel való osztási maradékát. Ha a két maradék egyenlő, akkor Béla nyerte a játékot, különben András. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Add meg ezt a nyerő stratégiát!

2. feladat. Az $ABCD$ téglalap CD oldalának belső pontja M. Legyen a C-ből az MB-re és a D-ből az MA-ra bocsátott merőleges egyenesek metszéspontja P. A P-ből a CD-re bocsátott merőleges talppontját jelöljük N-nel. Bizonyítsd be, hogy $CN = MD$!

3. feladat. Oldd meg a $3 \cdot \sqrt{x+1} = \frac{1}{9}x^2 - 1$ egyenletet a valós számok halmazán!

4. feladat. Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egymást követő páratlan háromjegyű természetes számok. Tudjuk azt, hogy bárhogyan írjuk egymás mellé ezeket a háromjegyű számokat, az így kapott $3n$-jegyű szám prímszám. Igazold, hogy $n \leq 2$!

5. feladat. Apraja-falván élnek a Hupikék törpikék és mindegyik rendelkezik valamennyi törpbogyóval. Azt kell tudni a törpökről, hogy nagyon empatikus lények, különösen a barátaikkal szemben: egy törp, ha észreveszi, hogy egy barátjának legalább 2-vel kevesebb törpbogyója van, mint neki, akkor ad neki egyet. Minden törpnek van legalább egy barátja, a barátságok kölcsönösek és senki sem eszik vagy gyűjt törpbogyót. Bizonyítsd be, hogy egy idő után mindegyik törp abba fogja hagyni az adakozást!

6. feladat. A hegyesszögű ABC háromszög A csúcsából bocsássunk merőlegest a B és C csúcsokból induló belső szögfelezőkre, a merőlegesek talppontjai D, illetve E. Legyen a háromszög beírt körének középpontja K. A DEK háromszög körülírt köre az AB oldalt a P, a CA oldalt a Q belső pontban metszi. Igazold, hogy a PE és QD egyenesek a BC oldalon metszik egymást!

Megjegyzések: Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, amelyből 1 pont hivatalból jár. A feladatok lényeges általánosítására maximálisan további 5 pont szerezhető. Munkaidő: 4 óra.