# XXXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

**Temesvár, 2026. április 22–26.**

## X. osztály

**1. feladat** (10 pont)**.** András és Béla az asztalon előttük lévő 101 darab papírlappal játszanak, melyekre rendre a következő számokat írták: $3^1, 3^2, \ldots, 3^{100}, 3^{101}$. (Mindegyik lapra egy számot írtak, és minden számot egyszer használtak fel.) Egy lépésben a soron következő játékos kiválaszthatja bármelyik papírlapot, és azt vagy a saját kosarába, vagy az ellenfele kosarába teszi. András kezdi a játékot, és felváltva lépnek. A játék akkor ér véget, amikor mindegyik papírlap belekerült valamelyikük kosarába. Ezt követően mindketten kiszámolják a kosarukba került számok összegének 5-tel való osztási maradékát. Ha a két maradék egyenlő, akkor Béla nyerte a játékot, különben András. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Add meg ezt a nyerő stratégiát!

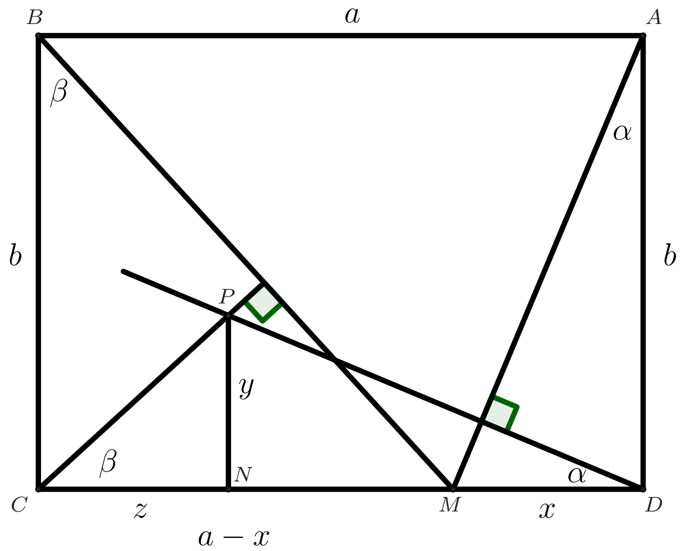
*Erdős Gábor, Nagykanizsa*
*Szabó Magda, Szabadka*

*Megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Andrásnak van nyerő stratégiája. **(1 pont)**
Vizsgáljuk meg a felsorolt hatványok 5-tel való osztási maradékát. Ezek rendre $3, 4, 2, 1, 3, 4, \ldots$. A maradékok sorozata periodikus, a periódus hossza 4. **(2 pont)**
Minden maradékból lesz 25 darab, és további egy darab lesz a 3-as maradékból, vagyis abból összesen 26 darab. **(1 pont)**
A továbbiakban a hatványok helyett csak a maradékokról beszélünk: ha az mondjuk, hogy elveszek egy 2-est, azt úgy kell érteni, hogy elveszek egy olyan hatványt tartalmazó lapot, amelyre írt szám 5-tel való osztási maradéka 2. Észrevehetjük még, hogy egy 1-es és egy 4-es összegének 5-tel való osztási maradéka 0. Nevezzük az 1-es párjának a 4-est. Hasonlóan, a 2-es párja a 3-as. Mindegyik lapnak van egy párja, egyedül az egyik 3-as marad pár nélkül. András vegyen el egy 3-ast és rakja magához. Az első lépés után az András kosarában lévő számok összegének 5-tel való osztási maradéka 3, a Béla kosarában lévő számok 5-tel való osztási maradéka pedig 0. Ezt követően, ha Béla valamit elvesz és odateszi az egyik kosárba, akkor András tegye ugyanabba a kosárba a Béla által odatett szám párját. **(4 pont)**
Egy ilyen lépéspár után az egyes kosarakban lévő számok összegének 5-tel való osztási maradéka nem változik. A végén András kosarában 3, Béláéban 0 lesz a számok összegének 5-tel való osztási maradéka, tehát nem lesz egyenlő, így András nyer. **(1 pont)**
■

**2. feladat** (10 pont)**.** Az $ABCD$ téglalap $CD$ oldalának belső pontja $M$. Legyen a $C$-ből az $MB$-re és a $D$-ből az $MA$-ra bocsátott merőleges egyenesek metszéspontja $P$. A $P$-ből a $CD$-re bocsátott merőleges talppontját jelöljük $N$-nel. Bizonyítsd be, hogy $CN = MD$!

*Dr. Katz Sándor, Bonyhád*

*Első megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Tekintsük a mellékelt ábra jelöléseit. **(1 pont)**




Vegyük észre, hogy a $\widehat{CBM}$ és a $\widehat{PCN}$ szögek, illetve a $\widehat{MAD}$ és $\widehat{PDN}$ szögek mértéke egyenlő, mert páronként merőleges szárú hegyesszögek. (**2 pont**)
Innen kapjuk, hogy a $CBM$ és $NCP$, illetve $MAD$ és $PDN$ derékszögű háromszögek hasonlóak. (**2 pont**)
A megfelelő oldalak arányait felírva kapjuk, hogy

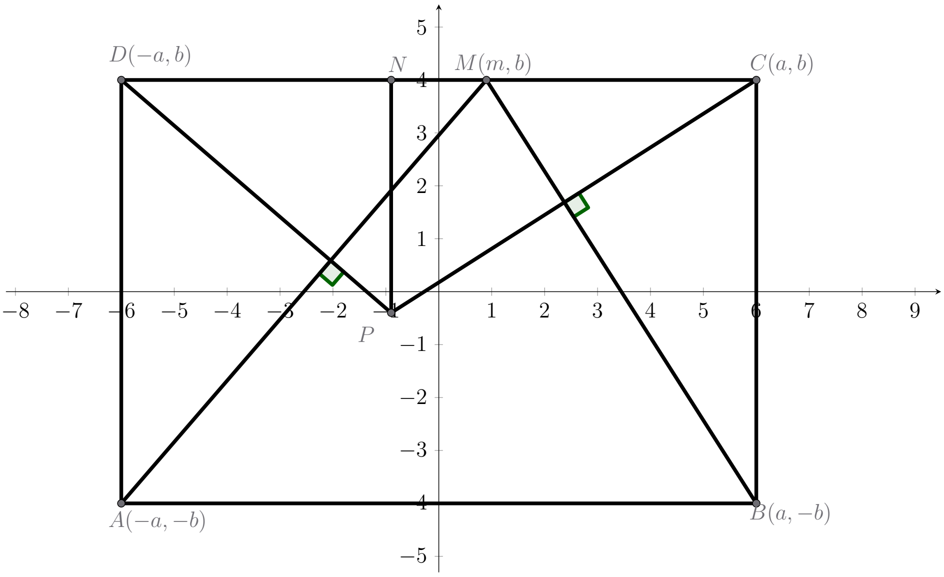
$$\frac{b}{a-x} = \frac{z}{y} \quad \text{és} \quad \frac{x}{b} = \frac{y}{a-z}. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Ezeket összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{x}{a-x} &= \frac{z}{a-z}, \\ xa - zx &= az - zx, \\ a(x-z) &= 0. \end{aligned} \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Mivel az $a$ hossza nem nulla, ezért $x = z$, tehát $MD$ és $CN$ szakaszok hossza megegyezik. (**1 pont**)
■

*Második megoldás.* Hivatalból (**1 pont**)
Helyezzünk el egy derékszögű koordinátarendszert a téglalap síkjában úgy, hogy a koordináta-tengelyek a téglalap szimmetria tengelyei legyenek, az ábrának megfelelő módon. A téglalap $C$ csúcsa legyen $C(a, b)$, innen következik, hogy a további csúcsok $D(-a, b)$ , $A(-a, -b)$ és $B(a, -b)$. Az $M(m, b)$ pont eleme a $DC$-nek, vagyis $m \in [-a, a]$. (**2 pont**)




Ekkor a $CP$ egyenesnek a $\overrightarrow{BM} = (m-a)\vec{i}+2b\vec{j}$ vektor a normálvektora, ezért a $CP$ egyenes egyenlete:

$$(m-a)(x-a) + 2b(y-b) = 0. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A $DP$ egyenesnek az $\overrightarrow{AM} = (m+a)\vec{i} + 2b\vec{j}$ vektor a normálvektora, ezért a $DP$ egyenes egyenlete:

$$(m+a)(x+a) + 2b(y-b) = 0. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A két egyenletből alkotott egyenletrendszer megoldása a $P$ pont koordinátái. Kivonva a két egyenletet egymásból azt kapjuk, hogy

$$(m+a)(x+a) - (m-a)(x-a) + 2b(y+b) - 2b(y-b) = 0,$$

ahonnan $2ax + 2ma = 0$, vagyis $x = -m$. **(2 pont)**
Tehát a $P$ pont abszcisszája $-m$, ami azt jelenti, hogy az $N$ pontnak az abszcisszája is $-m$. Tehát az $N$ pont az $M$ pontnak az $Oy$ tengelyre vonatkoztatott szimmetrikusa, és ezzel igazoltuk a kért állítást. **(1 pont)**

■

**Megjegyzés.** A megoldásból következik, hogy a feladat kijelentése igaz a $DC$ egyenes bármely $M$ pontja esetén is.

**3. feladat** (10 pont)**.** Oldd meg a $3 \cdot \sqrt{x+1} = \dfrac{1}{9}x^2 - 1$ egyenletet a valós számok halmazán!

*Fedorszki Ádám, Beregszász-Budapest*

*Első megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Az egyenlet értelmezési tartománya $D = [-1, +\infty)$. **(1 pont)**
Legyen $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$, ekkor $y = 3\sqrt{x+1} \geq 0$, **(1 pont)**
innen pedig kifejezve $x$-et kapjuk, hogy $x = \frac{1}{9}y^2 - 1$. **(1 pont)**
Ezt kivonva a $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ egyenlőségből következik, hogy

$$y - x = \frac{1}{9}(x^2 - y^2) = \frac{1}{9}(x-y)(x+y).$$

Innen

$$(y-x)\left(1 + \frac{1}{9}(x+y)\right) = 0.$$

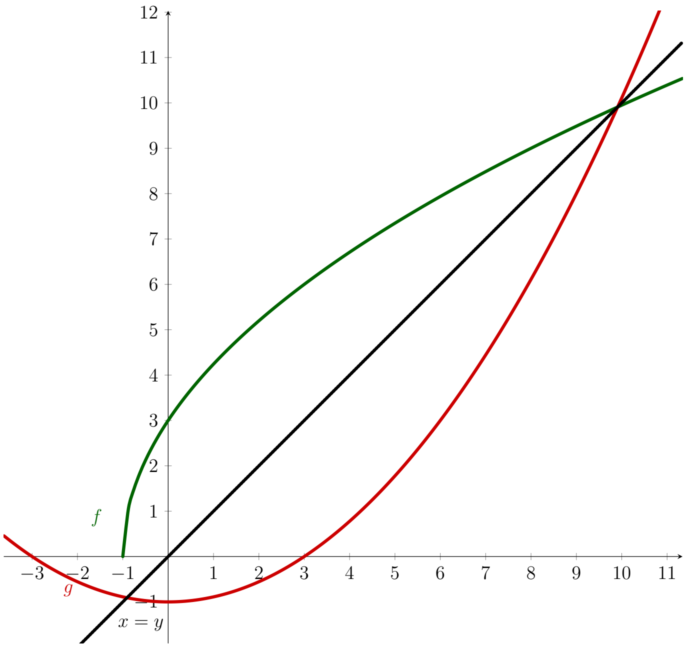
Tehát vagy $y-x=0$, vagy $1+\frac{1}{9}(x+y)=0$. **(2 pont)**
Ha $y=x$, akkor $x=3\sqrt{x+1}$, vagyis

$$x^2=9(x+1).$$

Ennek az egyenletnek a gyökei $\frac{9\pm\sqrt{117}}{2}$. Mivel $x=y\geq 0$, ezek közül csak a $\frac{9+\sqrt{117}}{2}$ megoldás. **(2 pont)**
Ha $1+\frac{1}{9}(x+y)=0$, akkor $y=-9-x$. Tehát a $-9-x=\frac{1}{9}x^2-1$ egyenletet kapjuk, melynek nincs valós megoldása. **(1 pont)**
Tehát az egyedüli megoldás a $\frac{9+\sqrt{117}}{2}$, mely valóban megoldása az eredeti egyeletnek is. **(1 pont)**

■

*Második megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**




Az egyenlet értelmezési tartománya $D=[-1,+\infty)$. **(1 pont)**
Ha $x\in[-1,0)$, akkor $3\sqrt{x+1}\geq 0$ és $\frac{1}{9}x^2-1<0$, ezért az egyenlet megoldását csak a $[0,+\infty)$ intervallumon keressük. **(1 pont)**
Tekintsük az $f:[-1,+\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=3\sqrt{x+1}$ és $g:[0,+\infty)\to[-1,+\infty)$, $g(x)=\frac{1}{9}x^2-1$ függvényeket. Észrevehető, hogy $f=g^{-1}$. Valóban, ha $g(x)=y$, akkor

$$\frac{1}{9}x^2-1=y \iff x^2=9y+9 \iff |x|=3\sqrt{y+1}=f(y).$$

Mivel $x\geq 0$, következik, hogy $x=f(y)$. **(2 pont)**
Tehát az egyenlet $f(x)=f^{-1}(x)$ alakba írható. Tudva azt, hogy egy függvénynek és az inverzének a grafikus képei egymás szimmetrikusai az első szögfelezőre nézve, **(1 pont)**
és azt, hogy az $f$ és az $f^{-1}$ szigorúan növekvőek, **(1 pont)**
következik, hogy $f(x)=f^{-1}(x)=x$. Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} 3\sqrt{x+1} &= x \\ \frac{1}{9}x^2-1 &= x \end{cases}$$

Az első összefüggés alapján $x\geq 0$, a második összefüggés pedig a következő módon alakítható:

$$\frac{1}{9}x^2-1=x \iff x^2-9x-9=0.$$

melynek megoldásai $x_{1,2} = \frac{9\pm\sqrt{117}}{2}$, **(2 pont)**
ezek közül az egyetlen pozitív megoldás az $x = \frac{9+\sqrt{117}}{2}$. **(1 pont)**

■

**Megjegyzés.** Annak alátámasztására, hogy a függvények az első szögfelezőn metszik egymást, elfogadható grafikus érvelés is.

**4. feladat** (10 pont)**.** Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egymást követő páratlan háromjegyű természetes számok. Tudjuk azt, hogy bárhogyan írjuk egymás mellé ezeket a háromjegyű számokat, az így kapott $3n$-jegyű szám prímszám. Igazold, hogy $n \leq 2$!

*Agó Krisztina, Újvidék*

*Megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Ha $n \geq 5$, akkor az $a_i$ számok egyike 5-re végződik, így létezik olyan permutáció, amelynél a vizsgált szám 5-re végződik, tehát nem prímszám. Következésképpen $n \leq 4$. **(3 pont)**
Ha $n = 4$, akkor vegyük észre, hogy $a_1$ csak $\overline{ab7}$ alakú lehet, különben az $a_2, a_3, a_4$ számok valamelyike 5-ben végződne, így a felírt szám nem lehet prímszám. **(1 pont)**
Továbbá két lehetőség van. Ha $b < 9$, akkor $a_1 = \overline{ab7}, a_2 = \overline{ab9}, a_3 = \overline{a(b+1)1}, a_4 = \overline{a(b+1)3}$. Most vegyük észre, hogy ezeknek az $\overline{a_1a_2\boldsymbol{a_4a_3}}$ sorrendjéből alkotott szám osztható 11-gyel. Valóban

$$a - b + 7 - a + b - 9 + a - (b+1) + 3 - a + (b+1) - 1 = 0.$$ **(1 pont)**

Ha $b = 9$, akkor $a_1 = \overline{a97}, a_2 = \overline{a99}, a_3 = \overline{(a+1)01}, a_4 = \overline{(a+1)03}$. Most vegyük észre, hogy ezeknek az $\overline{a_1a_2\boldsymbol{a_4a_3}}$ sorrendjéből alkotott szám osztható 11-el. Valóban

$$a - 9 + 7 - a + 9 - 9 + (a+1) - 0 + 3 - (a+1) + 0 - 1 = 0.$$ **(1 pont)**

Ha $n = 3$, akkor a számjegyek összege minden permutáció esetén osztható 3-mal. Valóban, ha $a_1$-nek 3-mal való osztási maradéka $r$, akkor bármilyen permutáció esetén a számjegyei összegének 3-mal való osztási maradéka $r + r + 2 + r + 4 = 3r + 6$, így a szám osztható 3-mal.
Tehát $n \leq 2$. **(3 pont)**

■

**Megjegyzés.** Például $n = 2$ esetében az $a_1 = 109, a_2 = 111$ számok teljesítik a feltételt.

**5. feladat** (10 pont)**.** Apraja-falván élnek a Hupikék törpikék és mindegyik rendelkezik valamennyi törpbogyóval. Azt kell tudni a törpökről, hogy nagyon empatikus lények, különösen a barátaikkal szemben: egy törp, ha észreveszi, hogy egy barátjának legalább 2-vel kevesebb törpbogyója van, mint neki, akkor ad neki egyet. Minden törpnek van legalább egy barátja, a barátságok kölcsönösek és senki sem eszik vagy gyűjt törpbogyót. Bizonyítsd be, hogy egy idő után mindegyik törp abba fogja hagyni az adakozást!

*Loga Patrik, Kolozsvár*

*Megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Jelöljük a törpök számát $n$-nel, és legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az egyes törpök bogyóinak száma egy adott pillanatban. Vizsgáljuk az

$$E = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

kifejezés változását minden ajándékozás után. **(2 pont)**
Tegyük fel, hogy az $A$ törp, akinek $x_a$ darab törpbogyója van, ad egy bogyót a $B$ törpnek, akinek $x_b$ darab törpbogyója van. Ennek feltétele, hogy $x_a \geq x_b + 2$. **(1 pont)**

Az ajándékozás után az $A$-nak $x_a - 1$, a $B$-nek $x_b + 1$ törpbogyója lesz. **(1 pont)**
Írjuk fel hogyan változik $E$ értéke!

$$E_{\text{új}} - E_{\text{régi}} = (x_a - 1)^2 + (x_b + 1)^2 - x_a^2 - x_b^2 = 2(x_b - x_a + 1) \leq 2(-2 + 1) = -2. \quad \textbf{(3 pont)}$$

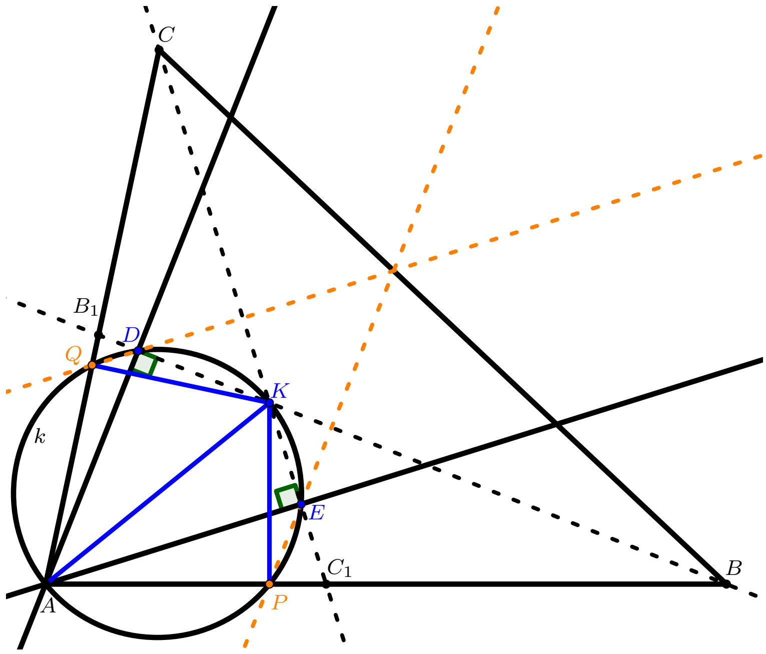
Vegyük észre, hogy az $E$ értéke soha nem lehet negatív. Mivel az $E$ értéke minden adakozás után szigorúan csökken, ezért nem történhet végtelen sok adakozás. **(2 pont)**

■

**6. feladat** (10 pont)**.** A hegyesszögű $ABC$ háromszög $A$ csúcsából bocsássunk merőlegest a $B$ és $C$ csúcsokból induló belső szögfelezőkre, a merőlegesek talppontjai $D$, illetve $E$. Legyen a háromszög beírt körének középpontja $K$. A $DEK$ háromszög körülírt köre az $AB$ oldalt a $P$, a $CA$ oldalt a $Q$ belső pontban metszi. Igazold, hogy a $PE$ és $QD$ egyenesek a $BC$ oldalon metszik egymást!

*Bíró Bálint, Eger*

*Megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
A $B$, $C$ csúcsokból induló belső szögfelezők a beírt kör $K$ középpontjában metszik egymást, a szemben levő oldalakat pedig a $B_1$, $C_1$ pontokban. A feltételek miatt $AKD$ és $AKE$ derékszögű háromszögek, amelyek közös átfogója $AK$. Ezek szerint az $AEKD$ négyszög húrnégyszög, és a húrnégyszög köré írt $k$ kör egyik átmérője az $AK$ szakasz. Az is világos, hogy a $k$ kör megegyezik a $DEK$ háromszög körülírt körével. **(1 pont)**
Tekintsük a mellékelt ábrát.




Mivel $AK$ átmérője a $k$ körnek, és a $P, Q$ pontok is rajta vannak ezen a körön, ezért

$$\widehat{APK} = \widehat{AQK} = 90°.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $KP$ és $KQ$ a beírt kör középpontjából az oldalakra bocsátott merőleges szakaszok. **(1 pont)**
Legyenek a szokásos jelöléseknek megfelelően $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCA} = \gamma$.
Ezekkel a jelölésekkel $\widehat{KAP} = \widehat{KAQ} = \frac{\alpha}{2}$, és mivel $APEK$ is a $k$ körbe írt húrnégyszög, ezért $\widehat{PEK} = 180° - \frac{\alpha}{2}$. Innen kapjuk, hogy $\widehat{C_1EP} = \frac{\alpha}{2}$, viszon ugyancsak látható, hogy $\widehat{EC_1P} = \widehat{CC_1A} = \beta + \frac{\gamma}{2}$, ezért

$$\widehat{EPC_1} = 180° - \beta - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Hasonlóan belátható, hogy mivel $AKDQ$ a $k$ körbe írt húrnégyszög és $\widehat{KAQ} = \frac{\alpha}{2}$, ezért egyrészt $\widehat{QDK} = 180° - \frac{\alpha}{2}$, másrészt $\widehat{B_1DQ} = \frac{\alpha}{2}$, amelyből $\widehat{BB_1A} = \widehat{DB_1Q} = \gamma + \frac{\beta}{2}$. Ezek alapján kapjuk, hogy

$$\widehat{DQB_1} = 180° - \gamma - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$ **(2 pont)**

Mivel $\widehat{EPC_1} = 90° - \frac{\beta}{2}$ és $\widehat{B_1BA} = \frac{\beta}{2}$, ezért a $PE$ egyenes merőleges a $BB_1$ belső szögfelezőre. Hasonlóan, mivel $\widehat{DQB_1} = 90° - \frac{\gamma}{2}$ és $\widehat{C_1CA} = \frac{\gamma}{2}$, ezért a $QD$ egyenes merőleges a $CC_1$ belső szögfelezőre. **(1 pont)**

Használjuk a $BC = a$, $CA = b$ és $AB = c$ jelöléseket. Ekkor $BP = s - b$ és $CQ = s - c$, ahol $s$ az $ABC$ háromszög félkerülete. Tehát a $BB_1$ szögfelezőre merőleges $PE$ egyenes a $BC$ szakaszból egy $s - b$ hosszúságú szakaszt vág le. Hasonlóan a $CC_1$ szögfelezőre merőleges $QD$ egyenes a $BC$ szakaszból egy $s - c$ hosszúságú szakaszt vág le. **(1 pont)**

Innen viszont következik, hogy a $PE$ és a $QD$ egyenesek által a $BC$-ből lemetszett szakaszok hosszának összege $s - b + s - c = 2s - b - c = a$. Ez akkor és csakis akkor lehetséges, hogy ha a $PE$ és a $QD$ egyenesek a $BC$ oldalon metszik egymást.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk. **(1 pont)**

■