XXXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Temesvár, 2026. április 22–26.

IX. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Három prímszám szorzata az összegük hétszeresével egyenlő. Add meg az összes lehetséges megoldást!

Bálint Béla, Felvidék
Mikó István, Felvidék

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Jelöljük x-szel, y-nal és z-vel a keresett prímeket. Ekkor a feltétel alapján

$$xyz = 7(x + y + z).$$

Mivel x, y és z is prím, így valamelyik egyenlő 7-tel. **(1 pont)**
Az általánosság megszorítása nélkül legyen $x = 7$. Ekkor a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$\begin{aligned} yz &= 7 + y + z, \\ yz - (y + z) + 1 &= 8, \\ (y - 1)(z - 1) &= 8, \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan

$$(y - 1)(z - 1) = 8 \cdot 1 \quad \text{vagy} \quad (y - 1)(z - 1) = 4 \cdot 2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az $(y - 1)(z - 1) = 8 \cdot 1$ nem ad megoldást, mivel a 9 nem prím. **(2 pont)**
Az $(y - 1)(z - 1) = 4 \cdot 2$ egyenlőségből kapjuk, hogy $y = 5$ és $z = 3$. A feladat szimmetrikussága miatt a sorrend mellékes. **(2 pont)**
Tehát az egyetlen megoldást a $3, 5, 7$ prímszámhármas adja. **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont)**.** A Fibonacci-számsorozat első két tagja 1-es és a harmadiktól kezdve pedig úgy kapjuk a tagokat, hogy az előző két tagot összeadjuk, vagyis a sorozat első néhány tagja: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Hány olyan szám van a sorozat első 2026 tagja között, amelynek a 7-tel való osztási maradéka 6?

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A harmadiktól kezdve mindegyik tag maradéka egyenlő az előző két tag maradéka összegének maradékával, így az első néhány tag maradéka:

$$1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 2 \ldots \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A vastagított két 1-es az első olyan egymást követő két számból álló rendezett számpár, amely ugyanabban a sorrendben megismétlődik a sorozatban. **(1 pont)**
Két tag maradéka mindig meghatározza a következő tag maradékát, így a két 1-es után ismét 2-es jön, és így tovább. **(1 pont)**
A sorozat periodikus, a periódus hossza 16. Mivel

$$2026 = 126 \cdot 16 + 10,$$

ezért a periódust alkotó 16 számot 126-szor írtuk le, és még az elejéről további 10 számot. (**2 pont**)
Egy perióduson belül a hatosok száma 4, így a 126 periódusban $126 \cdot 4 = 504$ darab hatos van, a további 10 szám közül még 3 darab hatos található. (**2 pont**)
Összesen 507 olyan tagja van a sorozatnak az első 2026 között, amelynek 7-tel való osztási maradéka 6. (**1 pont**)
■

3. feladat (10 pont)**.** 1992 szigorúan pozitív egész szám négyzetösszege 2026. Melyek ezek a számok?
Zavargó Zsuzsanna, Zenta

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1992}^2 = 2026, \qquad x_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Ezeknek a számoknak a többsége 1-gyel egyenlő, de néhány, mondjuk k darab különbözik 1-től. Ennek a k darab számnak az értéke tehát legalább 2, így felírható:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 \geq 4k \qquad \text{és} \qquad x_{k+1}^2 + \cdots + x_{1992}^2 = 1992 - k.$$

A két összefüggésből belátható, hogy

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1992}^2 = 2026 \geq 3k + 1992,$$

azaz $k \leq 11$, tehát nem több, mint 11 szám különbözik 1-től. (**1 pont**)
A 12. tagtól kezdve tehát csupa egyeseink vannak. Ekkor megfelelő átrendezéssel kapjuk, hogy

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{11}^2 = 2026 - (1992 - 11) = 45. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az első 11 tag között pedig lehet: a_1 darab egyes, a_2 darab kettes, a_3 darab hármas, a_4 darab négyes, a_5 darab ötös és a_6 darab hatos. Nagyobb szám már nem szerepelhet. Ekkor felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 11, & \textit{(1)} \\ a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 16a_4 + 25a_5 + 36a_6 = 45. \end{cases} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az első egyenletet kivonva a másodikból kapjuk, hogy:

$$3a_2 + 8a_3 + 15a_4 + 24a_5 + 35a_6 = 34,$$

azaz $35a_6 \leq 34$, tehát $a_6 = 0$, vagyis nincs a számok között hatos. (**1 pont**)
Így az egyenletünk:

$$3a_2 + 8a_3 + 15a_4 + 24a_5 = 34.$$

Mivel $24a_5 \leq 34$, így az a_5 értéke csak 0 vagy 1 lehet.

1. Ha $a_5 = 0$, akkor

$$3a_2 + 8a_3 + 15a_4 = 34,$$
$$3(a_2 + 3a_3 + 5a_4 - 11) = a_3 + 1.$$

Innen következik, hogy $a_3 + 1$ osztható 3-mal. Mivel $8a_3 \leq 34$, innen következik, hogy $a_3 = 2$. (**1 pont**)

Ekkor

$$3a_2 + 15a_4 = 18,$$
$$a_2 + 5a_4 = 6.$$

Innen két megoldást kapunk:

$$(a_2, a_4) \in \{(1,1); (6,0)\}$$ **(1 pont)**

Ekkor az *(1)* egyenletből: $a_1 = 11 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5$, tehát:

- ha $a_2 = a_4 = 1$, akkor $a_1 = 7$,
- ha $a_2 = 6$ és $a_4 = 0$, akkor $a_1 = 3$.

2. Ha $a_5 = 1$, akkor

$$3a_2 + 8a_3 + 15a_4 = 10,$$

azaz $a_4 = 0$. Azonban a

$$3a_2 + 8a_3 = 10$$

egyenletnek nincsenek pozitív egész megoldásai. **(1 pont)**

Összesen, két különböző megoldást találtunk:

$$\underbrace{1,1,1,1,1,1,1}_{7\text{ db}},\ 2,\ 3,3,\ 4,\ \underbrace{1,\ldots,1}_{1981\text{ db}},$$

vagyis 1988 darab 1-es, 1 darab 2-es, 2 darab 3-as, 1 darab 4-es, **(1 pont)**
illetve

$$\underbrace{1,1,1}_{3\text{ db}},\ \underbrace{2,2,2,2,2,2}_{6\text{ db}},\ \underbrace{3,3}_{2\text{ db}},\ \underbrace{1,\ldots,1}_{1981\text{ db}},$$

vagyis összesen 1984 darab 1-es, 6 darab 2-es, 2 darab 3-as. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1992}^2 = 2026$$

Legyen 1991 darab 1-es, ekkor az 1992. tag 35 kell legyen, amely nem négyzetszám. **(1 pont)**
Ha 1990 darab 1-est írunk, akkor a 36-ot kell felírni 2 négyzetszám összegeként, ami lehetetlen.
Ha 1989 darab 1-est írunk, akkor a 37-et kell felírni 3 négyzetszám összegeként, ami szintén lehetetlen. **(2 pont)**
Viszont, ha 1988 darab 1-est írunk, akkor a 38-at felírhatjuk 1 darab 2-es, 2 darab 3-as és 1 darab 4-es segítségével. **(2 pont)**
Tehát megkapjuk az első megoldást.
Észrevehető, hogy a fenti eljárás folytatásával minden elvett 1-es a maradékhoz csak önmagában adódhat, így minden ilyen csoportosítás az első megoldásra vezethető vissza. **(1 pont)**
Ugyanakkor 4 darab 1-es áthelyezése után a maradék felbontható 6 darab 2-es, 2 darab 3-as segítségével is. **(2 pont)**
Így kapunk még egy megoldást.
További megoldásokat nem generálhatunk, mert további egyesek elvételével az előző két megoldás egyikét kapjuk vissza. **(1 pont)**

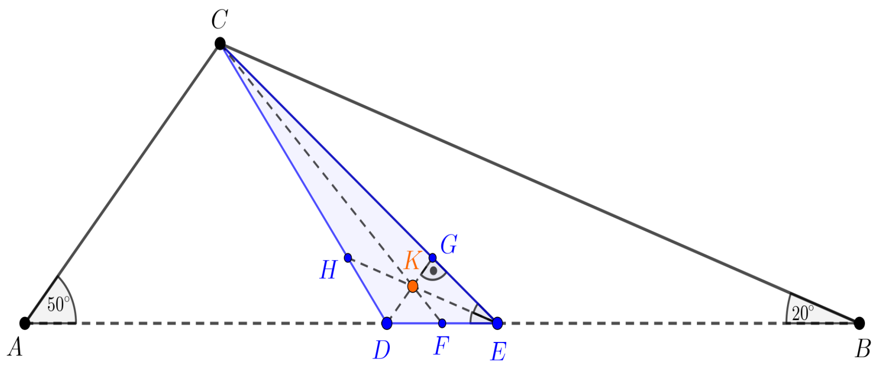
■

4. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszögben $\widehat{CAB} = 50°$ és $\widehat{ABC} = 20°$. Az AB oldalon felvesszük a D és E különböző pontokat úgy, hogy D az AE szakasz belső pontja, míg E a DB szakasz belső pontja és $AD = BE = CE$.
Bizonyítsd be, hogy a CDE háromszögben a C csúcsból induló súlyvonal (oldalfelező), a D csúcsból induló magasságvonal és az E csúcsból induló belső szögfelező egy pontban metszik egymást!

Bíró Bálint, Eger

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A CDE háromszögben jelölje:

- F a DE oldal felezőpontját,
- G a D-ből induló magasság talppontját a CE oldalon,
- H az E-ből induló belső szögfelező metszéspontját a CD oldallal.



Azt kell bizonyítani, hogy CF, DG és EH egy pontban metszik egymást.
Mivel $BE = CE$, a BCE háromszög egyenlő szárú, ezért

$$\widehat{BCE} = \widehat{CBE} = 20°.$$

Így

$$\widehat{ACE} = \widehat{ACB} - \widehat{BCE} = 110° - 20° = 90°.$$

Tehát az ACE háromszög derékszögű, ezért $AC \perp CE$. **(1 pont)**
Viszont tudjuk, hogy $DG \perp CE$ (magasság), tehát $DG \parallel AC$. **(1 pont)**
A kis Thalész-tételt (párhuzamos szelők tételét) alkalmazva az $EAC_{\triangle}$-ben:

$$\frac{EG}{GC} = \frac{ED}{DA}.$$

Mivel $AD = CE$, következik, hogy

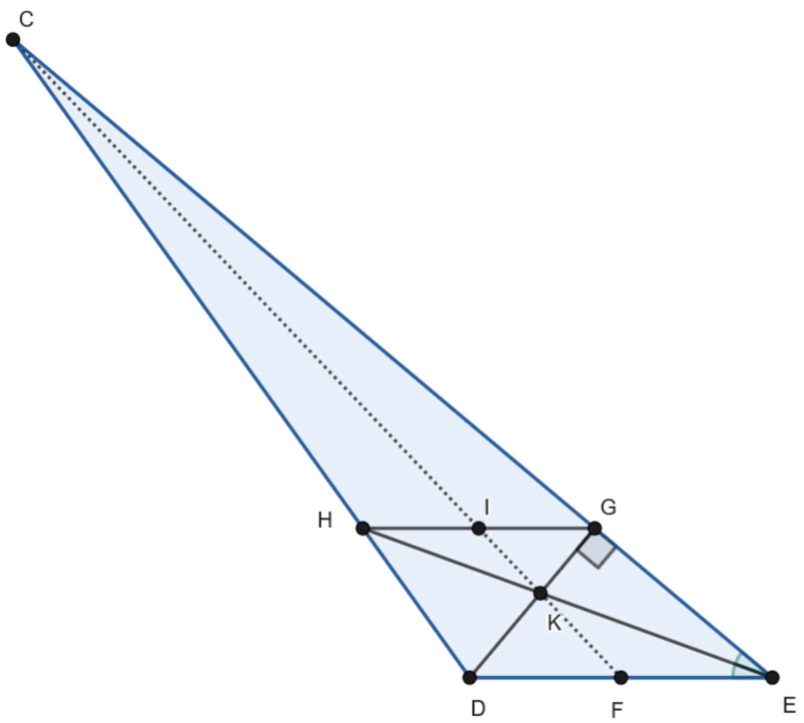
$$\frac{EG}{GC} = \frac{DE}{CE}.$$ **(1 pont)**

Másrészt, EH belső szögfelező, a szögfelezőtétel szerint

$$\frac{CH}{HD} = \frac{CE}{DE}.$$ **(1 pont)**

Első befejezés:
Korábbiakból megkaptuk, hogy
$$\frac{EG}{GC} = \frac{DE}{CE} = \frac{DH}{HC}.$$
A párhuzamos szelők tételének fordítottja szerint ebből következik, hogy

$$HG \parallel DE.$$ **(1 pont)**



Legyen
$$\{K\} = DG \cap EH.$$
A továbbiakban belátjuk, hogy $K \in CF$.
Legyen I a HG szakasz felezőpontja. Mivel $HG \parallel DE$, ezért

$$CHG_\triangle \sim CDE_\triangle.$$

Ebben a hasonlóságban a HG oldal felezőpontja a DE oldal felezőpontjának felel meg, vagyis I-nek F felel meg. Ezért

C, I, F kollineárisak. **(1 pont)**

Másrészt, mivel $HG \parallel DE$, ezért
$$KHG_\triangle \sim KED_\triangle.$$
Ebben a hasonlóságban ismét a HG oldal felezőpontja a DE oldal felezőpontjának felel meg, tehát

K, I, F kollineárisak. **(1 pont)**

Így

C, I, K, F kollineárisak,

vagyis K rajta van CF súlyvonalon (oldalfelezőn). (**1 pont**)
De $K \in DG$ és $K \in EH$ is, tehát

$$CF \cap DG \cap EH = \{K\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Második befejezés: Mivel F a DE oldal felezőpontja, így

$$\frac{DF}{FE} = 1.$$

Az előbbiekből megkapjuk, hogy

$$\frac{DF}{FE} \cdot \frac{EG}{GC} \cdot \frac{CH}{HD} = 1 \cdot \frac{DE}{CE} \cdot \frac{CE}{DE} = 1. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Ceva fordított tétele szerint CF, DG és EH egy pontban metszik egymást. (**2 pont**)

$\blacksquare$

Megjegyzés. ***Segédtétel:*** *Ha a PQR derékszögű háromszög PQ átfogóján úgy helyezkedik el az S pont, hogy $PS = QR$, akkor az RSQ háromszög RR_1 súlyvonala, az SS_1 magasságvonala és a QQ_1 belső szögfelezője egy pontban metszik egymást.*
Alkalmazhatjuk az fenti segédtételt az $ECA_\triangle$ derékszögű háromszögben kialakított $CDE_\triangle$ háromszögre.

5. feladat (10 pont)**.** Határozd meg, hogy legtöbb hány részre osztja fel a síkot 10 darab olyan téglalap, amelyeknek megfelelő oldalaik párhuzamosak!

dr. Ágó Krisztina, Vajdaság

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
A feladat megoldását n téglalap esetére vezetjük le.
Tegyük fel, hogy a síkban már elhelyeztünk $n-1$ téglalapot és éppen az n.-et helyezzük el. Az általuk meghatározott síkrészletek száma akkor lesz a legnagyobb, ha az újonnan elhelyezett téglalap metsz minden korábban elhelyezett téglalapot pontosan négy pontban. (**1 pont**)
Ha egy zárt görbét k pontban metszenek a korábbi vonalak, akkor a görbe k ívre darabolódik, és minden ívdarab az őt tartalmazó síkrészt kettőbe osztja. Tehát k darab új síkrész jön létre. (**1 pont**)
Az új téglalap minden korábbi téglalapot legfeljebb 4 pontban metszhet, ezért az új téglalap kerületén legfeljebb $4(n-1)$ metszéspont keletkezhet. (**1 pont**)
Jelöljük t_n-nel a n-edik téglalap után keletkezett síkrészek számát. A leírtak alapján t_n-re teljesül a következő rekurzív reláció:

$$t_n = t_{n-1} + 4(n-1). \qquad (2) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

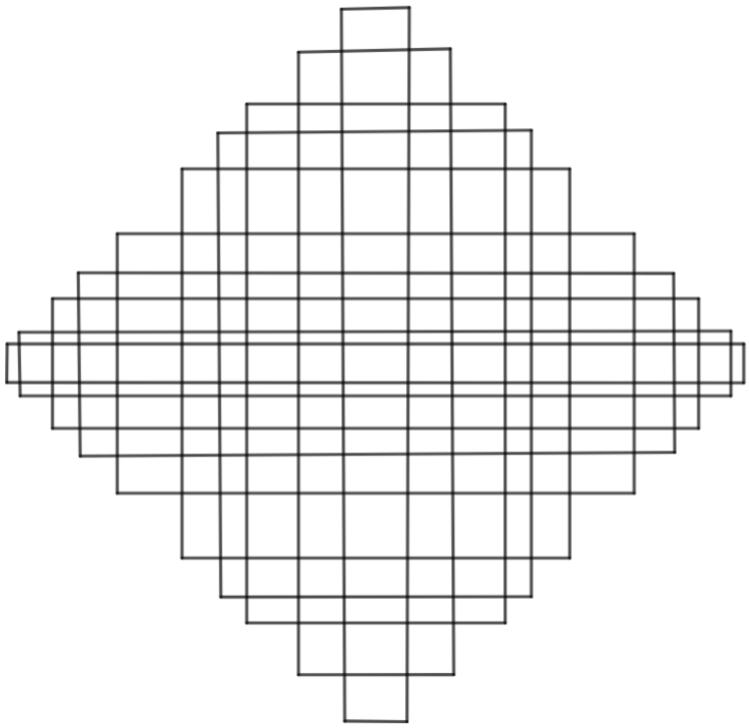
Mivel ez minden korábbi értékre igaz, így felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + 4(n-1), \\ t_{n-1} &= t_{n-2} + 4(n-2), \\ &\vdots \\ t_2 &= t_1 + 4 \cdot 1, \\ t_1 &= 2. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

(Ezt tudjuk számolás nélkül.) Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} t_n &= 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \cdots + 4(n-1) \\ &= 2 + 4(1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ &= 2 + 4\frac{(n-1)n}{2} \\ &= 2n^2 - 2n + 2. \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A feladat kérdésére a válasz tehát: $2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 + 2 = 182$, amelyet ki tudunk számolni csak a *(2)* és a $t_1 = 2$ információk felhasználásával is, kihagyva az azt követő levezetést. (**2 pont**)



■

6. feladat (10 pont)**.** Egy $n \times n$-es négyzetrácsot *cselesnek* nevezünk, ha a mezőibe be tudjuk írni a pozitív egész számokat 1-től n^2-ig úgy, hogy bármely két egymást követő szám élben szomszédos mezőbe kerüljön, és a négyzetszámok mind különböző sorban és különböző oszlopban legyenek.

a) Igazold, hogy $n = 3$ esetén nincs cseles négyzetrács!

b) Adj példát egy-egy cseles négyzetrácsra $n = 4$, illetve $n = 5$ esetén!

c) Létezik-e cseles négyzetrács, ha $n = 2026$? Válaszodat indokold!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) $n = 3$ esetén a négyzetrácsot sakktáblaszerűen fekete-fehérre színezzük, feketével kezdve. Ekkor a páratlan számok fekete mezőre, míg a párosak fehérre kerülnek, mivel több fekete mezőnk van. A rendelkezésünkre álló 9 számból 3 négyzetszám, így a 4-es biztosan fehér mezőre kerül.

Az általánosság megszegése nélkül, feltételezzük, hogy a 4-es az első oszlop fehér mezőjében van, így az 1-es csak a harmadik oszlop egyik fekete mezőjében lehet. Ezáltal a 9-es csakis a második oszlop egyetlen fekete mezejébe kellene kerüljön, ez azonban nem teljesíti a cselesség feltételét. (**2 pont**)

b) Egy-egy kitöltés $n = 4$ és $n = 5$ esetén:

2	3	4	5
1	8	7	6
10	9	14	15
11	12	13	16

(**1 pont**)

1	6	7	10	11
2	5	8	9	12
3	4	15	14	13
18	17	16	23	24
19	20	21	22	25

(**1 pont**)

c) Legyen $n = 4k + 2$, ahol $k \in \mathbb{Z}_+$. Színezzük ki az $n \times n$-es négyzetrácsot sakktáblaszerűen fekete-fehérre.
Mivel egymást követő számok élben szomszédos mezőkbe kerülnek, ezért az $1, 2, 3, \ldots, n^2$ számok színe felváltva változik. Következésképpen az összes páratlan szám az egyik színre, az összes páros szám a másik színre kerül. (**1 pont**)
Az $1^2, 2^2, \ldots, n^2$ négyzetszámok közül pontosan $2k + 1$ páratlan és pontosan $2k + 1$ páros, tehát a négyzetszámok közül az egyik színen $2k + 1$, a másikon szintén $2k + 1$ áll. (**1 pont**)
A négyzetszámok száma n, és mivel ezek mind különböző sorban és különböző oszlopban vannak, ezért minden sorban és minden oszlopban pontosan egy négyzetszám áll.
Megvizsgáljuk, hogy egy ilyen, soronként és oszloponként pontosan egy mezőt tartalmazó kiválasztásban hány fekete mező lehet. Számozzuk a sorokat és oszlopokat 1-től n-ig, és mondjuk azt, hogy egy mező fekete, ha a sor- és oszlopszám paritása azonos.
Mivel $n = 4k + 2$, ezért $2k + 1$ páratlan és $2k + 1$ páros sor, valamint ugyanennyi páratlan és páros oszlop van. Legyen x a páratlan sorban és páratlan oszlopban álló kiválasztott mezők száma. Ekkor a maradék $2k+1-x$ páratlan oszlopban a kiválasztott mező páros sorban áll. Így a páros sorok közül $2k+1-x$ már felhasznált, tehát még x páros sor marad. Ezekben a kiválasztott mező szükségképpen páros oszlopban áll, vagyis a páros sorban és páros oszlopban álló kiválasztott mezők száma is x.
Vagyis a fekete kiválasztott mezők száma $2x$, tehát páros. (**2 pont**)
Ez azonban lehetetlen, mert láttuk, hogy a négyzetszámok közül mindegyik színen pontosan $2k + 1$ áll, ami páratlan. Az ellentmondás azt mutatja, hogy $(4k + 2) \times (4k + 2)$-es négyzetrácson ilyen elrendezés nem létezik. Mivel 2026 néggyel való osztási maradéka 2, következik, hogy nincs cseles négyzetrács, ha $n = 2026$. (**1 pont**)

■

Megjegyzés. Általánosan:
Pontosan akkor létezik $n \times n$-es cseles négyzetrács, ha $n = 4k$ vagy $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Bizonyítás. Ha kiszínezzük a négyzetrácsot sakktáblaszerűen feketére és fehérre, mivel egymást követő számok élben szomszédos mezőkbe kerülnek, ezért az $1, 2, 3, \ldots, n^2$ számok egy olyan utat alkotnak, amely lépésenként váltogatja a mezők színét. Következésképpen a páratlan és páros számok felváltva kerülnek a két színosztályba.
A négyzetszámok száma n, és mivel ezek mind különböző sorban és különböző oszlopban vannak, ezért minden sorban és minden oszlopban pontosan egy négyzetszám áll.
Számozzuk a sorokat és oszlopokat 1-gyel, 2-vel, …, n-nel, és tekintsük feketének azokat a mezőket, amelyekre a sor- és oszlopszám azonos paritású.
Először tegyük fel, hogy $n = 2m$. Jelölje x azoknak a kiválasztott mezőknek a számát, amelyek páratlan sorban és páratlan oszlopban állnak. Mivel minden páratlan oszlopot pontosan egyszer használunk, ezért a páratlan oszlopokban fennmaradó kiválasztott mezők száma $m - x$, ezek szükségképpen páros sorban vannak. Ugyanígy, a páros oszlopokban pontosan $m - x$ kiválasztott mező lesz páratlan sorban, tehát a páros sor–páros oszlop típusú kiválasztott mezők száma $m-(m-x) = x$. A fekete kiválasztott mezők száma tehát $x + x = 2x$, vagyis páros.
Most tegyük fel, hogy $n = 2m + 1$ páratlan. Ekkor a páratlan sorok és a páratlan oszlopok száma is $m + 1$, a párosaké pedig m. Jelölje ismét x a páratlan sor–páratlan oszlop típusú kiválasztott mezők számát. Akkor a páros sor–páros oszlop típusú kiválasztott mezők száma $m - (m + 1 - x) = x - 1$, ezért a fekete kiválasztott mezők száma $x + (x - 1) = 2x - 1$, ami páratlan.
Ezzel igazoltuk, hogy ha egy $n \times n$-es sakktáblán minden sorból és minden oszlopból pontosan egy mezőt választunk ki, akkor a kiválasztott fekete mezők számának paritása megegyezik n paritásával.

Most visszatérünk a négyzetszámokra.
(a) Ha n páros, legyen $n = 2m$. Az $1^2, 2^2, \ldots, (2m)^2$ négyzetszámok közül pontosan m darab páratlan és m darab páros. Mivel az út mentén a színek váltakoznak, ezért a páratlan négyzetszámok az egyik színre, a páros négyzetszámok a másikra kerülnek. Tehát a négyzetszámok közül az egyik színen pontosan m darab áll.
Az előbbi állítás szerint viszont a kijelölt n mező között a fekete mezők száma páros kell legyen. Ezért m-nek párosnak kell lennie, tehát

$$n = 4k.$$

(b) Ha n páratlan, legyen $n = 2m + 1$. Ekkor a táblán az egyik színosztály pont egy mezővel nagyobb, mint a másik. Egy n^2 hosszúságú váltakozó színű út szükségképpen a nagyobb színosztályban kezdődik és végződik, ezért a páratlan számok mind ezen a színen állnak.
A négyzetszámok közül pontosan $m + 1$ páratlan. Tehát a négyzetszámok közül az egyik színen pontosan $m + 1$ darab áll.
A fenti állítás szerint viszont páratlan n esetén a kijelölt mezők között a fekete mezők száma is páratlan kell legyen, ezért $(m + 1)$-nek páratlannak kell lennie, vagyis m páros. Ebből következik, hogy

$$n = 4k + 1.$$

Most bebizonyítjuk, hogy minden $n = 4k$ vagy $n = 4k + 1$ esetén valóban létezik ilyen kitöltés.
Ehhez elegendő egy rekurzív bővítést adni: megmutatjuk, hogy ha van $n \times n$-es cseles négyzetrács, akkor abból mindig készíthető $(n + 4) \times (n + 4)$-es cseles négyzetrács.

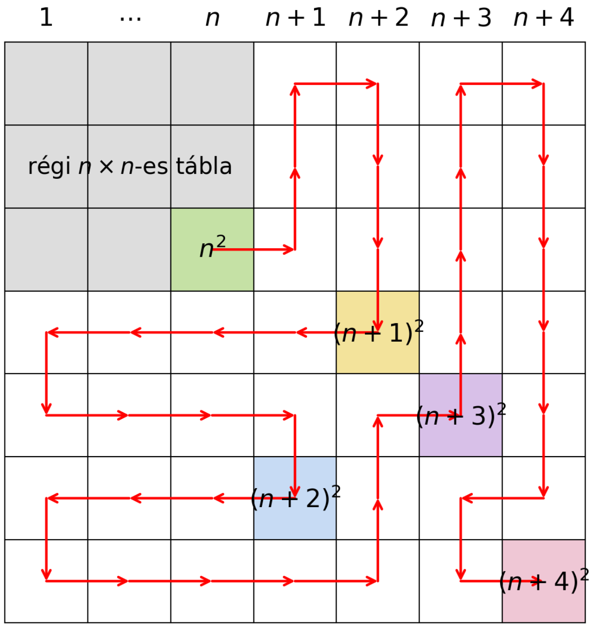
Tegyük fel tehát, hogy adott egy $(n \times n)$-es cseles négyzetrács, mégpedig úgy, hogy az n^2 szám a jobb alsó sarokban áll. (Ez az általunk használt kezdőpéldákban $n = 4$-re és $n = 5$-re teljesül, és a konstrukció ezt meg is őrzi.)

Az új $(n+4)\times(n+4)$-es négyzetrácsba az eredeti $n\times n$-es négyzetrácsot változatlanul beírjuk a bal felső sarokba. A maradék, vagyis a jobb oldali 4 oszlopból és az alsó 4 sorból álló keretet ezután az

$$n^2+1, n^2+2, \dots, (n+4)^2$$

számokkal egyetlen folytonos útként töltjük ki úgy, hogy az út az (n,n) mezőből induljon.
Az út a következőképpen halad:

$$\begin{aligned}(n,n) &\to (n,n+1) \uparrow (1,n+1) \to (1,n+2) \downarrow (n+1,n+2),\\ &\leftarrow (n+1,1) \downarrow (n+2,1) \to (n+2,n+1) \downarrow (n+3,n+1),\\ &\leftarrow (n+3,1) \downarrow (n+4,1) \to (n+4,n+2) \uparrow (n+2,n+2) \to (n+2,n+3),\\ &\uparrow (1,n+3) \to (1,n+4) \downarrow (n+3,n+4) \leftarrow (n+3,n+3) \downarrow (n+4,n+3) \to (n+4,n+4).\end{aligned}$$



Belátjuk, hogy az új négyzetszámok: $(n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2, (n+4)^2$ rendre a fenti út négy egymást követő szakaszának végpontjaira esnek. Ebből adódik, hogy

$$\begin{aligned}&(n+1)^2 \text{ az } (n+1,n+2) \text{ mezőre kerül,}\\ &(n+2)^2 \text{ az } (n+3,n+1) \text{ mezőre kerül,}\\ &(n+3)^2 \text{ az } (n+2,n+3) \text{ mezőre kerül,}\\ &(n+4)^2 \text{ az } (n+4,n+4) \text{ mezőre kerül.}\end{aligned}$$

Ezek a mezők négy különböző új sorban és négy különböző új oszlopban vannak. Az eredeti $1^2, 2^2, \dots, n^2$ négyzetszámok pedig továbbra is a régi n sorban és n oszlopban maradnak, ahol eleve különböző sorokban és különböző oszlopokban álltak. Ezért az új négyzetrácsban is minden négyzetszám más sorba és más oszlopba kerül.
Tehát ha van $n\times n$-es cseles négyzetrács, akkor van $(n+4)\times(n+4)$-es cseles négyzetrács is.